

Канонические связности на симметрических пространствах с неразрешимой группой преобразований

Н.П. Можей

Учреждение образования «Белорусский государственный университет информатики и радиоэлектроники»

Симметрическое пространство по Э. Картану – это пространство аффинной связности без кручения, тензор кривизны которого сохраняется при параллельном перенесении. Симметрические пространства встречаются во множестве ситуаций в математике и физике. Они – важные объекты изучения в теории представлений, гармоническом анализе, а также в дифференциальной геометрии.

Цель статьи – описание всех инвариантных аффинных связностей на трехмерных симметрических однородных пространствах вместе с их тензорами кривизны и кручения, канонических связностей и естественных связностей без кручения.

Материал и методы. *Материал исследования – симметрические пространства и связности на них. Определены основные понятия: изотропно-точная пара, симметрическое пространство, каноническое разложение, аффинная связность, каноническая связность, естественная связность без кручения, тензор кручения, тензор кривизны, алгебра голономии.*

Результаты и их обсуждение. *Приведено локальное описание трехмерных симметрических однородных пространств, на которых действует неразрешимая группа Ли преобразований с разрешимым стабилизатором. Локальная классификация однородных пространств эквивалентна описанию эффективных пар алгебр Ли. Впервые найдены все инвариантные аффинные связности на таких однородных пространствах, выписаны явно канонические связности и естественные связности без кручения, найдены тензоры кривизны, кручения, алгебры голономии указанных связностей. Исследования основаны на использовании свойств алгебр Ли, групп Ли и однородных пространств и носят, главным образом, локальный характер.*

Заключение. *Особенностью представленной работы является применение чисто алгебраического подхода к описанию многообразий и связностей на них, а также сочетание различных методов дифференциальной геометрии, теории групп и алгебр Ли и теории однородных пространств. Полученные результаты могут быть использованы при исследовании многообразий, а также иметь приложения в различных областях геометрии, топологии, дифференциальных уравнений, анализа, алгебры, в общей теории относительности, ядерной физике, физике элементарных частиц и др., поскольку многие фундаментальные задачи в этих областях связаны с изучением инвариантных объектов на симметрических пространствах.*

Ключевые слова: *каноническая связность, симметрическое пространство, группа Ли, тензор кривизны.*

Canonical Connections on Symmetric Spaces with Unsolvable Group of Transformations

N.P. Mozhey

Educational Establishment «Belarusian State University of Informatics and Radioelectronics»

A symmetric space by E. Cartan is a space of affine connection without torsion, its curvature tensor is invariant under parallel transport. Symmetric spaces arise in a wide variety of situations in both mathematics and physics. They are important objects of study in representation theory and harmonic analysis as well as in differential geometry.

The purpose of the work is the description of all invariant affine connections on three-dimensional symmetric homogeneous spaces together with their curvature and torsion tensors, canonical connections and natural torsion-free connections.

Material and methods. *The object of the investigation is symmetric spaces and connections on them. The basic notions, such as an isotropically-faithful pair, a symmetric space, a canonical decomposition, an affine connection, a canonical connection, a natural torsion-free connection, curvature and torsion tensors, a holonomy, algebra are defined.*

Findings and their discussion. *The local description of three-dimensional symmetric homogeneous spaces with an unsolvable Lie group of transformations and a solvable stabilizer is given. The local classification of homogeneous spaces is equivalent to the description of the effective pairs of Lie algebras. All invariant affine connections on those spaces, canonical connections and*

natural torsion-free connections are described, curvature and torsion tensors, holonomy algebras are found. Studies are based on the use of properties of the Lie algebras, Lie groups and homogeneous spaces and they mainly have local character.

Conclusion. *The peculiarity of techniques presented in the work is the application of purely algebraic approach to the description of manifolds and connections on them, as well as compound of methods of differential geometry, the theory of Lie groups and algebras and the theory of homogeneous spaces. The results can be used in the study of manifolds, and can have applications in various fields of geometry, topology, differential equations, analysis, algebra, general theory of relativity, nuclear physics, physics of elementary particles and others, as many fundamental problems in these areas relate to the study of invariant objects on symmetric spaces.*

Key words: *canonical connection, symmetric space, Lie group, curvature tensor.*