

Самоподобные однородные двумерное и трехмерное лоренцевы многообразия

М.Н. Подоксенов

Учреждение образования «Витебский государственный
университет имени П.М. Машерова»

Риманово или лоренцево многообразие называется самоподобным, если оно допускает существенную однопараметрическую группу подобий. Пусть (G, g) – это однородное многообразие группы Ли, снабженной левоинвариантной лоренцевой метрикой. Преобразование $f: G \rightarrow G$ называется гомотетическим автоморфизмом, или автоподобием, если оно является одновременно подобием и автоморфизмом группы Ли.

Цель данной работы – найти самоподобные однородные лоренцевы многообразия одной двумерной и одной трехмерной групп Ли и указать их группы гомотетических автоморфизмов.

Материал и методы. Рассматриваются две связанные группы Ли, снабженные левоинвариантной лоренцевой метрикой: двумерная $G=A^+(1)$, которую можно представить как группу аффинных преобразований прямой, сохраняющих ориентацию прямой, и трехмерная $G_3=A^+(1)\times R$. Используются методы линейной алгебры и дифференциальной геометрии.

Результаты и их обсуждение. В работе приводится матричное представление двумерной и трехмерной связанных групп Ли $G=A^+(1)$, $A^+(1)\times R$ и соответствующих алгебр Ли, вводятся координаты на них и указываются координатные записи левого сдвига и экспоненциального отображения. Сначала находятся автоподобия алгебр Ли, а затем они переносятся на группы Ли. Это позволяет найти формулы, по которым действуют однопараметрические группы подобий рассматриваемых однородных лоренцевых многообразий, в том числе те, которые являются автоморфизмами групп Ли, а также найти полные группы подобий этих многообразий.

Заключение. Найлены два самоподобных лоренцевых однородных многообразия двумерной и трехмерной связанных групп Ли и указаны однопараметрические группы гомотетических автоморфизмов, а также найдены их полные группы подобий. Результаты данной работы могут быть распространены на четырехмерную группу Ли подтипа VI_1 по классификации Бианки.

Ключевые слова: однородное многообразие, группа Ли, подобие, лоренцева метрика.

Semi-similar Homogeneous Two-dimensional and Three-dimensional Lorentzian Manifolds

M.N. Podoksenov

Educational Establishment «Vitebsk State P.M. Masherov University»

Riemannian or Lorentzian manifold is called self-similar if it admits an essential one-parameter group of homothetic transformations. Let (G, g) be a homogeneous manifold of Lie group, supplied by left-invariant Lorentzian metrics. A transformation $f: G \rightarrow G$ is said to be a homothetic automorphism, or an autosimilarity, if it is simultaneously a homothetic transformation and an automorphism of Lie group.

The objective of this paper is to find homogeneous self-similar Lorentzian manifolds of one two-dimensional and one three-dimensional Lie groups and specify their groups of homothetic automorphisms.

Material and methods. Two connected Lie groups, supplied with left-invariant Lorentzian metrics are considered: two-dimensional $G=A^+(1)$ (it can be represented as a group of affine transformations of a straight line, which preserve orientation of the line) and three-dimensional $G_3=A^+(1)\times R$.

Methods of linear algebra and differential geometry are used.

Findings and their discussion. In present paper matrix representation of two-dimensional and three-dimensional connected Lie groups $G=A^+(1)$, $A^+(1)\times R$ and their Lie algebras are presented; coordinates are introduced and formulas of left shift and exponential mapping in this coordinates are specified. First autosimilarities of the Lie algebras are found, then they are carried over to the Lie groups. It makes it possible to find formulas of one-parameter groups of similarities of the considered homogeneous

Lorentzian manifolds, including those, which are automorphisms of Lie groups, and to find general groups of similarities of the considered homogeneous manifolds.

Conclusion. *Two self-similar homogeneous Lorentzian manifolds of two-dimensional and three-dimensional connected Lie groups are found, their one-parameter groups of homothetic automorphisms are specified and also full groups of similarities are found. The results of the present paper can be carried over to four-dimensional Lie group of Bianchi subtype VI₁.*

Key words: *Homogeneous manifold, Lie group, similarity, Lorentzian metrics.*