УДК 517.956.32

НЕХАРАКТЕРИСТИЧЕСКАЯ СМЕШАННАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ ОДНОМЕРНОГО ВОЛНОВОГО УРАВНЕНИЯ В ПЕРВОЙ ЧЕТВЕРТИ ПЛОСКОСТИ ПРИ НЕСТАЦИОНАРНЫХ ГРАНИЧНЫХ ВТОРЫХ ПРОИЗВОДНЫХ

Ф.Е. Ломовцев, В.В. Лысенко
Белорусский государственный университет

Модификацией метода характеристик выведена явная формула единственного и устойчивого классического решения линейной смешанной задачи для общего неоднородного уравнения колебаний полуограниченной струны с нехарактеристическими и нестационарными вторыми частными производными в граничном режиме. Введено понятие характеристических вторых производных на границе. Нехарактеристичность вторых производных означает, что они направлены не вдоль критической характеристики уравнения. Их нестационарность означает, что их коэффициенты зависят от времени. Предложен новый метод погружения в решения с фиксированными значениями, упрощающий решение систем дифференциальных уравнений.

Цель работы – явное решение и исследование корректности смешанной задачи по Адамару во множестве классических решений.

Материал и методы. Материалом служит линейная смешанная задача для общего неоднородного уравнения колебаний полуограниченной струны при нехарактеристических вторых производных и зависящих от времени коэффициентах в граничном режиме. Нахождение классического решения и исследование корректности по Адамару (существования, единственности и устойчивости) во множестве классических решений смешанной задачи проводится модификацией известного метода характеристик (распространяющихся волн) и предложенным в настоящей работе методом погружения в решения с фиксированными значениями.

Результаты и их обсуждение. Выведена явная формула единственного и устойчивого классического решения смешанной задачи для общего неоднородного уравнения колебаний полуограниченной струны при нестационарных и нехарактеристических вторых производных в граничном режиме. Единственность решения обеспечивается алгоритмом его поиска. Устойчивость (непрерывная зависимость) классического решения от исходных данных (правой части уравнения, начальных данных и граничного данного) следует из теоремы Банаха о замкнутом графике. Установлен критерий корректности во множестве классических решений искомой смешанной задачи. Этот критерий состоит из необходимых и достаточных требований гладкости на правую часть уравнения, начальные данные и граничное данное и условия согласования между ними для однозначной и устойчивой везде разрешимости во множестве классических решений. Дано понятие характеристических вторых производных в граничном режиме. Предложен метод погружения в решения с фиксированными значениями. Приведен пример задачи, подтверждающий утверждение доказанной теоремы. Полученные результаты дают полное и окончательное решение и исследование смешанной задачи.

Заключение. Доказана теорема с явной формулой классического решения и критерием корректности по Адамару смешанной задачи при нехарактеристических вторых производных и зависящих от времени коэффициентах в граничном режиме. Эта теорема имеет характер глобальной теоремы, потому что в ней исходные данные задачи не продолжаются вне множеств их задания, и ее результаты являются полными и окончательными.

Ключевые слова: смешанная задача, нестационарный граничный режим, характеристические вторые производные, метод погружения в решения с фиксированными значениями, критерий корректности.

NON-CHARACTERISTIC MIXED PROBLEM FOR A ONE-DIMENSIONAL WAVE EQUATION IN THE FIRST QUARTER OF THE PLANE WITH NON-STATIONARY BOUNDARY SECOND DERIVATIVES

F.E. Lomovtsev, V.V. Lysenko
Belarusian State University

A modification of the characteristic method yields an explicit formula for a unique and stable classical solution of a linear mixed problem for a general inhomogeneous oscillation equation of a semi-bounded string with non-characteristic and non-stationary second partial derivatives in the boundary mode. The concept of characteristic second derivatives on the boundary is introduced. The non-characteristic nature of the second derivatives means that they are not directed along the critical characteristic of the equation. Their non-stationary nature means that their coefficients depend on time. An immersion method in solutions with fixed values, simplifying the solution of systems of differential equations is proposed.

The goal of the work is an explicit solution and the study of its Hadamard correctness according to the set of classical solutions.

Material and methods. The material of the work is a linear mixed problem for a general inhomogeneous oscillation equation of a semi-bounded string with non-characteristic second derivatives and time-dependent coefficients in the boundary mode. Finding a classical solution and studying Hadamard correctness (existence, uniqueness and stability) in the set of classical solutions of mixed problem is carried out by modifying the well-known characteristic method (propagating waves) and the method of immersion in solutions with fixed values proposed in this paper.

Findings and their discussion. An explicit formula for a unique and stable classical solution of a mixed problem for a general inhomogeneous oscillation equation of a semi-bounded string with non-stationary and non-characteristic second derivatives in the boundary mode is derived. The uniqueness of the solution is provided by the algorithm of its search. The stability (continuous dependence) of the classical solution on the original data (the right-hand side of the equation, the initial data and the boundary data) follows the Banach theorem on a closed graph. The correctness criterion is established in the set of classical solutions of the desired mixed problem. This correctness criterion consists of the necessary and sufficient smoothness requirements for the righthand side of the equation, the initial data and the boundary data, and the matching condition between them for the unique and stable everywhere solvability in the set of classical solutions. The concept of characteristic second derivatives in the boundary mode is given. An immersion method in solutions with fixed values is proposed. An example of a problem confirming the statement of the proved theorem is given. The obtained findings give a complete and final resolution and investigation of the mixed problem.

Conclusion. A theorem is proved with an explicit formula for a classical solution and a Hadamard correctness criterion for a mixed problem with non-characteristic second derivatives and time-dependent coefficients in the boundary mode. This theorem has the character of a global theorem, because in it the original data of the problem does not continue outside the sets of their tasks and its results are complete and final.

Key words: mixed problem, non-stationary boundary regime, characteristic second derivatives, immersion method in solutions with fixed values, correctness criterion.