

# РАЗВИТИЕ ТЕОРИИ МАТЕМАТИЧЕСКОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ И ЕЕ ПРИЛОЖЕНИЯ В ОБРАЗОВАНИИ И ПРОИЗВОДСТВЕННЫХ ПРОЦЕССАХ

## О ПРОИЗВЕДЕНИИ ФИТТИНГОВЫХ ФУНКТОРОВ С ЗАДАНЫМИ СВОЙСТВАМИ ПОКРЫВАЮЩИХ ПОДГРУПП

*Е.А. Витько  
Витебск, ВГУ имени П.М. Машерова*

Основная цель настоящей работы – описание нового свойства фиттинговых функторов.

В определениях и обозначениях мы следуем [1].

Пусть  $U$  – класс конечных групп, который одновременно является  $S$ -замкнутым и  $N_0$ -замкнутым. Все рассматриваемые в работе группы – это группы из класса  $U$ .

Напомним, что отображение  $f$ , которое каждой группе  $G \in U$  ставит в соответствие некоторое непустое множество ее подгрупп  $f(G)$ , называется фиттинговым  $U$ -функтором, если выполняются следующие условия:

(i) если  $\alpha: G \rightarrow \alpha(G)$  – изоморфизм, то

$$f(\alpha(G)) = \{\alpha(X) : X \in f(G)\};$$

(ii) если  $N$  – нормальная подгруппа группы  $G$ , то

$$f(N) = \{X \cap N : X \in f(G)\}.$$

Фиттингов  $U$ -функтор будем называть фиттинговым функтором для случая, когда  $U = E$  – класс всех конечных групп.

Пусть  $X$  и  $Y$  – непустые классы конечных групп,  $f$  – фиттингов  $U$ -функтор,  $F$  – класс Фиттинга.

**Определение.** Фиттингов  $U$ -функтор  $f$  назовем  $(X, Y)$ -фиттинговым функтором, если выполняется следующее условие: если  $G \in U$ ,  $K$  – нормальная подгруппа группы  $G$ ,  $K \in X$ ,  $M$  – подгруппа группы  $G$  такая, что  $K \leq M \leq G$  и  $M/K \in Y$  и некоторая подгруппа  $X \in f(G)$  покрывает  $M/K$ , то

$$f(M) = \{Z \cap M \mid Z \in f(G) \text{ и } Z \text{ покрывает } M/K\}.$$

Произведением фиттинговых  $U$ -функторов  $f$  и  $g$  называется отображение  $f \circ g$ , сопоставляющее каждой группе  $G \in U$  непустое множество подгрупп

$$(f \circ g)(G) = \{X \mid X \in f(Y) \text{ для некоторой подгруппы } Y \in g(G)\}.$$

Доказана

**Теорема.** Пусть  $X$  – наследственный класс групп,  $f$  –  $(X, Y)$ -фиттингов функтор,  $g$  – сопряженный  $(X, Y)$ -фиттингов функтор. Тогда произведение  $f \circ g$  –  $(X, Y)$ -фиттингов функтор.

1. Doerk, K. Finite Soluble Groups / K. Doerk, T. Hawkes. – Berlin-New York : Walter de Gruyter, 1992. – 891 p.

## О МИНИМАЛЬНЫХ КОМПОЗИЦИОННЫХ ФУНКЦИЯХ ХАРТЛИ ПОРОЖДЕННЫХ КЛАССОВ ФИТТИНГА

*Н.Н. Воробьев, А.Р. Филимонова  
Витебск, ВГУ имени П.М. Машерова*

Все рассматриваемые группы конечны. Мы будем использовать терминологию из [1–4].

Напомним, что класс групп  $F$  называется классом Фиттинга, если он замкнут относительно взятия нормальных подгрупп и произведений нормальных подгрупп из  $F$ .

Через  $\pi(G)$  обозначают множество всех различных простых делителей порядка группы  $G$ , а  $\pi(F)$  – объединение множеств  $\pi(G)$  для всех групп  $G$  из  $F$ . Символ  $\text{Com}(G)$  обозначает класс

всех абелевых простых групп  $A$  таких, что  $A \cong H/K$  для некоторого композиционного фактора  $H/K$  группы  $G$ .

Напомним, что для произвольного класса групп  $F \ni (1)$ , где  $(1)$  – класс всех единичных групп, символ  $G^F$  обозначает пересечение всех таких нормальных подгрупп  $N$ , что  $G/N \in F$ . Полагают,  $C_p(G) = G^{G_{cp}}$ , где  $G_{cp}$  – класс всех таких групп, все главные  $p$ -факторы которых центральны.

Пусть  $f$  – произвольная функция вида

$$f: \mathbb{P} \rightarrow \{\text{классы Фиттинга}\}. \quad (1)$$

Функции  $f$  сопоставляют класс групп  $CR(f) = (G \mid C_p(G) \in f(p) \text{ для всех } p \in \pi(\text{Com}(G)))$ . Если класс Фиттинга таков, что  $F = CR(f)$  для некоторой функции  $f$  вида (1), то  $F$  называют композиционным классом Фиттинга с композиционной функцией Хартли ( $H$ -функцией)  $f$  (см. [5]).

Напомним, что символом  $cfit(X)$  обозначают наименьший композиционный класс Фиттинга, содержащий  $X$ , где  $X$  – произвольная совокупность групп. В частности,  $fit(X)$  – наименьший класс Фиттинга, содержащий совокупность групп  $X$ .

Пусть  $\{f_i \mid i \in I\}$  – набор всех композиционных  $H$ -функций класса Фиттинга  $F$ . Тогда  $f = \bigcap_{i \in I} f_i$  является композиционной  $H$ -функцией класса Фиттинга  $F$ , называемой

*минимальной* [5]. Символом  $\vee(f_i \mid i \in I)$  обозначают такую  $H$ -функцию  $f$ , что  $f(a) = fit(\bigcup_{i \in I} f_i(a))$

для всех  $a \in \mathbb{P}$ . Для произвольной совокупности композиционных классов Фиттинга  $\{F_i \mid i \in I\}$  полагают  $\vee^c(F_i \mid i \in I) = cfit(\bigcup_{i \in I} F_i)$ .

Основной результат представляет следующая

**Теорема.** Пусть  $f_i$  – минимальная композиционная  $H$ -функция класса Фиттинга  $F_i$ ,  $i \in I$ . Тогда  $\vee(f_i \mid i \in I)$  – минимальная композиционная  $H$ -функция класса Фиттинга  $F = \vee^c(F_i \mid i \in I)$ .

1. Скиба, А.Н. Алгебра формаций / А.Н. Скиба. – Минск : Беларуская навука, 1997. – 240 с.
2. Воробьев, Н. Н. Алгебра классов конечных групп / Н. Н. Воробьев. – Витебск : ВГУ имени П. М. Машерова, 2012. – 322 с.
3. Скиба, А. Н. Кратно  $\omega$ -локальные формации и классы Фиттинга конечных групп / А. Н. Скиба, Л. А. Шеметков // Матем. труды. – 1999. – Т. 2, № 2. – С. 114–147.
4. Скиба, А. Н. Кратно  $L$ -композиционные формации конечных групп / А. Н. Скиба, Л. А. Шеметков // Украинский матем. журн. – 2000. – Т. 52, № 6. – С. 783–797.
5. Ведерников, В. А.  $\Omega$ -расслоенные формации и классы Фиттинга конечных групп / В. А. Ведерников, М. М. Сорокина // Дискретная математика. – 2001. – Т. 13, вып. 3. – С. 125–144.

## ЛОКАЛЬНЫЕ ЗАДАНИЯ МНОЖЕСТВ ХАРТЛИ КОНЕЧНОЙ ГРУППЫ

*Н.Т. Воробьев, Т.Б. Василевич  
Витебск, ВГУ имени П.М. Машерова*

Все группы, рассматриваемые в данной работе, конечны. В определениях и обозначениях мы следуем [1, 2]. Локальный метод изучения конечных разрешимых групп с помощью радикалов и классов Фиттинга впервые был предложен Хартли [3]. В теории классов конечных разрешимых групп известна теорема Гашюца-Фишера-Хартли о том, что для любого класса Фиттинга  $F$  в каждой разрешимой группе  $G$  существуют  $F$ -инъекторы и любые два из них сопряжены. Данная теорема представляет собой значительный вклад в построение неарифметической силовой теории и является обобщением фундаментальных теорем Силова и Холла. Для нахождения новых классов сопряженных инъекторов групп (в общем случае неразрешимых) применяют локальные методы исследования, предложенные Хартли [3] и Н.Т. Воробьевым, Го Вэньбином, Янгом Нанингом [4].

Основная цель настоящей работы – дальнейшее развитие локального метода Хартли [3] и определение условий, при которых множество Хартли конечной группы локально.

*Классом групп* называется множество групп, которое вместе с каждой своей группой содержит все изоморфные ей группы. Класс групп  $F$ , замкнутый относительно нормальных

подгрупп и произведений нормальных  $F$ -подгрупп, называют *классом Фиттинга* [1]. При этом подгруппу  $H \in F$  группы  $G$  называют  $F$ -*подгруппой*. Если  $F$  – непустой класс Фиттинга, то  $F$ -*радикалом*  $G_F$  группы  $G$  называют наибольшую среди нормальных подгрупп группы  $G$ , принадлежащих  $F$ . Напомним, что если  $F$  – непустой класс Фиттинга, то подгруппа  $V$  группы  $G$  называется:

а)  $F$ -*максимальной*, если  $V \in F$  и  $U = V$ , при условии, что  $V \leq U \leq G$  и  $U \in F$ ;

б)  $F$ -*инъектором*, если  $V \cap H$  является  $F$ -максимальной подгруппой  $H$  для всякой субнормальной подгруппы  $V$  группы  $G$  [1].

Локализуя понятие класса Фиттинга, Шеметков [5] и в разрешимом случае Андерсон [6] определили понятие множества Фиттинга группы  $G$ . *Множеством Фиттинга группы  $G$*  называют такое непустое множество подгрупп группы  $G$ , которое замкнуто относительно взятия нормальных подгрупп, их произведений и сопряжений подгрупп. Понятие  $F$ -инъектора и  $F$ -радикала группы для множества Фиттинга группы  $G$  определяется аналогично, как и для класса Фиттинга. Заметим, что *произведением*  $F \circ H$  множества Фиттинга группы  $G$  и класса Фиттинга  $H$  [4] называется множество всех таких подгрупп  $N$  группы  $G$ , что  $N/H_F \in H$ , то есть

$$F \circ H = \{N \leq G: N/H_F \in H\}.$$

Введем следующие обозначения:

$E_{p'}$  – класс всех  $p'$ -групп;

$N_p$  – класс всех нильпотентных  $p$ -групп.

Пусть  $\mathbb{P}$  – множество всех простых чисел, а  $\pi$  – некоторое подмножество множества  $\mathbb{P}$ . Дополнение к  $\pi$  во множестве  $\mathbb{P}$  обозначим через  $\pi'$ , то есть  $\pi' = \mathbb{P} \setminus \pi$ .

Следует отметить, что идея локализации состоит в изучении множеств Фиттинга группы  $G$ , определяемых отображениями (локальными  $H$ -функциями или функциями Хартли) множества  $\mathbb{P}$  всех простых чисел во множества Фиттинга группы  $G$ . Множество Фиттинга  $F$  группы  $G$  называется *локальным* [4], если

$$F = \bigcap_{p \in \pi} h(p) \circ (N_p E_{p'})$$

для некоторой  $H$ -функции  $h$  группы  $G$ .

Пусть  $\emptyset \neq \pi \subseteq \mathbb{P}$ ,  $h$  – функция Хартли группы  $G$  и  $HS(h) = \bigcap_{p \in \pi} h(p) \circ (E_{p'} N_p)$ . Множество Фиттинга  $H$  группы  $G$  назовем *множеством Хартли группы  $G$* , если  $H = HS(h)$  для некоторой  $H$ -функции  $h$ .

Пусть  $\emptyset \neq \pi \subseteq \mathbb{P}$  и  $h$  –  $H$ -функция множества Хартли  $H$  группы  $G$ . Тогда  $h$  назовем:

1) *приведенной*, если  $h(p) \subseteq H$  для всех  $p \in \pi$ ;

2) *полной*, если  $h(p) \subseteq h(q) \circ E_q$  для всех различных  $p, q \in \pi$ ;

3) *полной приведенной*, если  $h$  является одновременной полной и приведенной;

4) *постоянной*, если  $h(p) = h(q)$  для всех различных  $p, q \in \pi$ .

Основной результат работы следующая

**ТЕОРЕМА.** Пусть  $H$  – множество Хартли группы  $G$ . Тогда справедливы следующие утверждения:

1) *каждое множество Хартли группы  $G$  является локальным множеством Фиттинга;*

2) *существует локальное множество Фиттинга, которое не является множеством Хартли группы  $G$ .*

В настоящей работе изучена взаимосвязь между локальными множествами Фиттинга и множествами Хартли конечной группы.

*Работа выполнена при поддержке БРФФИ (грант Ф17М-064).*

1. Doerk, K. Finite solvable groups / K. Doerk, T. Hawkes // Berlin–New York : Walter de Gruyter. – 1992. – P.891.
2. Guo, W. Structure Theory for Canonical Classes of Finite Groups / W. Guo // Springer. – 2015. – P. 360.
3. Hartley B. On Fisher’s dualization of formation theory / B. Hartley // Proc. London Math. Soc. (Ser. 3). – 1969. – Vol. 19. – P. 193–207.
4. Yang Nanying. On  $F$ -injectors of fitting set of a finite group / Nanying Yang, W. Guo, N.T. Vorob’ev // Comm. Algebra. – 2018. – Vol. 46, № 1. – P. 217–229.
5. Шеметков, Л. А. О подгруппах  $\pi$ -разрешимых групп / Л. А. Шеметков // Конечные группы. – 1975. – С. 207–212.
6. Anderson, W. Injectors in finite soluble groups / W. Anderson // J.Algebra. 1975. № 36. – P. 333–338.

## О ПРОИЗВЕДЕНИЯХ ЧАСТИЧНО НАСЛЕДСТВЕННЫХ КЛАССОВ ФИТТИНГА

С.Н. Воробьев  
Витебск, ВГУ имени П.М. Машерова

В работе рассматриваются только конечные группы. Фишером [1] были определены классы групп, которые замкнуты относительно подгрупп вида  $PN$ , где  $P$  – силовская  $p$ -подгруппа группы  $G$ , а  $N$  – нормальная подгруппа  $G$ . В последующем такие классы групп стали называть классами Фишера [2]. Первоначальные шаги в исследовании классов Фишера и их характеристизации были предприняты Локеттом [3] и Хоуксом [4]. В частности, Локеттом [3] было установлено, что произведение двух любых разрешимых классов Фишера является классом Фишера. В связи с этим актуальна задача обобщения понятия класса Фишера и расширение результата Локетта на случай обобщенных неразрешимых классов Фишера.

Решение указанной задачи – основной результат указанной работы.

Напомним некоторые определения и обозначения, которые мы будем использовать.

Множество групп  $X$  называется *классом групп*, если  $X$  наряду с каждой группой содержит изоморфную ей. Подгруппа  $H$  группы  $G$  называется  *$X$ -подгруппой*, если  $H \in X$ .

Класс групп  $F$  называется *классом Фиттинга*, если  $F$  замкнут относительно взятия нормальных подгрупп и произведений нормальных  $F$ -подгрупп.

Если  $F$  – непустой класс Фиттинга, то наибольшую нормальную  $F$ -подгруппу группы  $G$  называют  *$F$ -радикалом* группы  $G$  и обозначают  $G_F$ .

Если  $F$  и  $H$  классы Фиттинга, то их *произведение* – класс групп  $FH = \{G : G/G_F \in H\}$ . Если класс групп  $F$  замкнут относительно взятия факторгрупп и конечных подпрямых произведений, то  $F$  называют *формацией*. Если  $F$  состоит из нильпотентных групп, то  $F$  называют нильпотентной *формацией*.

**Определение.** Пусть  $X$  – класс групп. Класс Фиттинга  $F$  называют  *$X$ -классом Фишера*, если из условия  $G \in F$ ,  $K \leq H \leq G$ ,  $K \triangleleft H$  и  $H/K \in X$  следует, что  $H \in F$ .

Заметим, что если  $X$  – класс всех нильпотентных групп, то  $X$ -класс Фишера является классом Фишера.

Основной результат работы – следующая

**Теорема.** Если  $X$  – нильпотентная *формация*, то произведение двух любых  $X$ -классов Фишера является  $X$ -классом Фишера.

В случае, когда  $X=N$  *формации* всех нильпотентных групп, получаем

**Следствие 1.** Произведение двух любых классов Фишера является классом Фишера.

**Следствие 2** (Локетт [3]). Произведение двух любых разрешимых классов Фишера является классом Фишера.

1. Fischer, B. Classes of conjugate subgroups in finite soluble groups / B. Fischer. // Yale University. – Lecture Notes. – 1966. – 101 p.
2. Hartley, B. On Fischer's dualization of formation theory / B. Hartley // Proc. London Math. Soc. – 1969. – Vol.3, №2. – P.193-207.
3. Lockett, F.P. On the theory of Fitting classes of finite soluble groups / F.P. Lockett // – Ph.D, thesis. Warwick : University of Warwick. Warwick. – 1971.
4. Hawkes, T.O. A Fitting Class Construction / T.O. Hawkes // Math. Proc. Cambridge Philos. Soc. – 1976. – Vol. 80. – P. 437-446.

## КЛАССЫ ФИТТИНГА С ЗАДАНЫМИ СВОЙСТВАМИ ОПЕРАТОРОВ ЛОКЕТТА

Е.Н. Залеская, Е.Ф. Дикович  
Витебск, ВГУ имени П.М. Машерова

Впервые классы Фиттинга упоминаются в статье Фишера [1] в 1966 г. В статье Фишера, Гашюца, Хартли [2] впервые рассматриваются классы Фиттинга конечных групп. Напомним, что классом Фиттинга или радикальным классом называется класс групп, замкнутый относительно нормальных подгрупп и их произведений.

В первой статье, которая была опубликована в 1966 году, классы Фиттинга были введены двойственным образом к формациям, классам групп, замкнутым относительно фактор-групп и подпрямых произведений.

Решение многих задач описания строения классов Фиттинга и их классификации связано с применением операторов Локетта «\*» и «\*» [3]. Напомним, что каждому непустому классу Фиттинга  $\mathfrak{F}$  Локетт [3] сопоставляет класс  $\mathfrak{F}^*$ , который определяется как наименьший из классов Фиттинга, содержащий  $\mathfrak{F}$ , такой, что для всех групп  $G$  и  $H$  справедливо равенство  $(G \times H)_{\mathfrak{F}^*} = G_{\mathfrak{F}^*} \times H_{\mathfrak{F}^*}$ , и класс  $\mathfrak{F}^*$  как пересечение всех таких классов Фиттинга  $\mathfrak{K}$ , для которых  $\mathfrak{K}^* = \mathfrak{F}^*$ . Класс Фиттинга называют классом Локетта [3], если  $\mathfrak{F} = \mathfrak{F}^*$ .

Заметим, что семейство классов Локетта обширно: оно содержит наследственные и обобщенно наследственные классы Фиттинга (классы Фишера), а также классы Фиттинга, замкнутые относительно гомоморфных образов или конечных подпрямых произведений (в частности, формации Фиттинга).

Непустой класс Фиттинга  $\mathfrak{F}$  называется нормальным, если  $\mathfrak{F}$ -радикал  $G_{\mathfrak{F}}$  является  $\mathfrak{F}$ -максимальной подгруппой  $G$  для любой группы  $G$ .

В 70-е годы XX века в связи с построением структурной теории классов Фиттинга Локеттом была сформулирована следующая проблема, которая в настоящее время известна как «гипотеза Локетта».

**Гипотеза Локетта (Локетт, 1974, [3]).** Каждый класс Фиттинга  $\mathfrak{F}$  совпадает с пересечением некоторого нормального класса Фиттинга  $\mathfrak{K}$  и  $\mathfrak{F}^*$ .

Класс Фиттинга  $\mathfrak{F}$ , удовлетворяющий гипотезе Локетта, будем называть  $\mathfrak{L}$ -классом. Если же класс  $\mathfrak{F}$  не является  $\mathfrak{L}$ -классом, то мы будем называть его  $\overline{\mathfrak{L}}$ -классом.

Первоначально гипотеза Локетта была подтверждена для разрешимых локальных наследственных классов Фиттинга Брайсом и Косси [4] в 1975 г. В дальнейшем гипотеза нашла подтверждение для следующих семейств классов Фиттинга: разрешимых локальных вида  $\mathfrak{K}\mathfrak{N}$ ,  $\mathfrak{K}\mathfrak{S}_\pi\mathfrak{S}'_\pi$  (Бейдлеман и Хаук [5]), классов вида  $\mathfrak{K}(\bigcap_{p \in \pi} \mathfrak{S}_p\mathfrak{S}'_p)$  (Дерк, Хоукс, 1992 г., [6]), произвольных разрешимых локальных (Н.Т. Воробьев, 1988 г., [7]). Кроме того, Галледжи в 1996 г. [8] установлено, что локальные классы Фиттинга произвольных групп также удовлетворяют гипотезе Локетта.

Для отдельных случаев частично локальных классов Фиттинга гипотеза Локетта была подтверждена Н.Т.Воробьевым, Е.Н.Залесской и Н.Н. Воробьевым в 2007 году [9], Е.Н.Залесской и Ж.П.Макаровой в 2012 году [10]. Для некоторых семейств произведений классов Фиттинга конечных групп гипотеза Локетта была подтверждена Е.Н. Залесской в 2016 году [11].

Однако проблема описания новых классов Фиттинга, удовлетворяющих гипотезе Локетта, остается по-прежнему актуальной.

**Целью** данной работы является описание новых классов Фиттинга, удовлетворяющих гипотезе Локетта.

**Материал и методы.** Объектом исследования являются классы Фиттинга конечных групп. В работе используются методы теории классов Фиттинга, методы теории формаций.

**Результаты и их обсуждения.** Результат данной работы отображен в следующей доказанной теореме.

**Теорема.** Пусть  $\mathfrak{K}$  и  $\mathfrak{N}$  – локальные классы Фиттинга, причем  $\mathfrak{N}$  – насыщенная радикальная формация. Тогда классы  $\mathfrak{K}\mathfrak{N}$  и  $\mathfrak{K}\mathfrak{N}$  удовлетворяют гипотезе Локетта.

**Заключение.** Полученные результаты о произведениях классов Фиттинга, удовлетворяющих гипотезе Локетта, можно использовать при изучении классов Фиттинга, а также при написании курсовых и дипломных проектов, чтении спецкурсов по теории групп для студентов математических специальностей.

1. Fischer, B. Klassen konjugierter Untergruppen in endlichen auflösbaren Gruppen / B. Fischer. - Habilitationsschrift, Universität Frankfurt (M). – 1966.
2. Fischer, B. Injektoren endlicher auflösbaren Gruppen / B. Fischer, W. Gaschutz, B. Hartley // Math. Z. – 1967. – Bd.102, №5. – S. 337 – 339.
3. Lockett, P. The Fitting class  $\mathfrak{F}^*$  / P. Lockett // Math. Z. – 1974. – Vol.137, №2. – P. 131-136.
4. Bryce, R.A. A problem in Theory of normal Fitting classes /R.A. Bryce, J. Cossey // Math. Z. – 1975. – Vol.141, №2. – P. 99-110.

5. Beidleman, J.C. Uber fittingklassen und Lockett-Vermutung / J.C. Beidleman, P. Hauck // Math. Z. – 1979. Bd.167, №2. – S. 161-167.
6. Doerk, K. Finite solvable groups / K. Doerk, T. Hawkes // Walter de Gryeter. – 1992. – New York, Berlin. – 891p.
7. Воробьев, Н.Т. О радикальных классах конечных групп с условием Локетта / Н. Т. Воробьев // Матем. заметки. – 1988. – Т.43, №2. – С. 161-168.
8. Gallego, M.P. Fitting pairs from direct limits and the Lockett conjecture / M. P. Gallego // Comm. Algebra – 1996. – Vol.24, №6. – P. 2011-2023.
9. Воробьев, Н.Т. О проблемах структуры классов Фиттинга / Н.Т. Воробьев, Е.Н. Залеская, Н.Н. Воробьев // Веснік ВДУ. – 2007. – №2 (44). – С. 105-108.
10. Залеская, Е.Н. О гипотезе Локетта для классов Фиттинга конечных групп / Е.Н.Залеская, Ж.П.Макарова // Веснік ВДУ. – 2012. – №6. – С.15-19.
11. Залеская, Е.Н. Гипотеза Локетта для произведений классов Фиттинга конечных групп / Е.Н.Залеская // Веснік ВДУ. – 2016. – №1. – С.5-8.

## РАЗРАБОТКА И ИССЛЕДОВАНИЕ ФРЕЙМОРКА ДЛЯ МОБИЛЬНОЙ РОБОТОТЕХНИЧЕСКОЙ ПЛАТФОРМЫ ROBOTINO

*О.С. Замжицкий  
Витебск, УО «ВГТУ»*

В недавнем будущем роботизированные системы были массивны и статичны. Перемещение такой системы в пространстве вызывало дополнительные трудности. Появление мобильных роботов, особенностью которых стало выполнение типовых задач стационарных роботов с возможностью перемещения в пространстве, сделало следующий шаг в развитии робототехники.

Для моделирования работы средств автоматизации и мобильных роботов используется обучающая система Robotino от компании Festo. Robotino – это одновременно мобильная робототехническая система с всенаправленным приводом, система для обучения и повышения квалификации, платформа для исследований и разработок для высших учебных заведений.

Однако робот лишен способности мыслить и в процессе функционирования он выполняет программу, составленную человеком. Зачастую написание такой программы ведется для каждой конкретной задачи, но, несмотря на различие таких задач, основные модули программы остаются неизменными. И в случае изменения задачи, которую должен выполнять робот, программисту требуется написать новую программу. Тогда модули, использованные в старой программе, или переписываются заново, или копируются и адаптируются под новую задачу, что является нерациональной тратой времени.

Целью данной работы являлось создание универсальной программы – структуры с множеством predefined модулей, соединяя которые возможно быстро составить решение требуемой задачи. В случае отсутствия нужного модуля программа позволяет его написать и использовать в дальнейшем при решении задач [1].

**Материал и методы.** Так как Robotino предназначается главным образом для обучения, то он выполнен модульно, все технические компоненты, а именно электроприводы, датчики, камеру, можно отключить от робота и изучить отдельно.

Структура робота:

1. Корпус робота – стальной корпус с бампером, обеспечивающий лёгкий доступ к батареям, двигателям и портам робота.
2. Подсистема питания – две аккумуляторные батареи (12V/9Ah кислотнo-свинцовые), позволяющие роботу работать в автономном режиме несколько часов.
3. Двигательная подсистема – три двигателя постоянного тока, редуктор и ременная передача на роликовые колёса, позволяющие роботу двигаться в различных направлениях.
4. Подсистема одометрии – датчики на валах двигателей, позволяющие отслеживать положение робота благодаря сбору подробной информации о его перемещении в пространстве.
5. Подсистема ввода/вывода – плата, выполняющая коммуникационную связь между компьютером робота и его датчиками, двигателями и интерфейсом ввода/вывода.
6. Подсистема беспроводной связи с внешним управляющим компьютером (Wi-Fi точка доступа).

7. Бортовой компьютер с процессором Intel Atom, 1.8 GHz, Dual Core. В качестве памяти используется 4GB ОЗУ и флэш-память на 32GB, на которую установлена встроенная версия операционной системы Linux.

8. Внешние сенсоры робота – 9 датчиков расстояния, USB web-камера), датчики линии и индукционный датчик (под роботом).

Robotino поддерживает интерфейсы: USB, Ethernet, VGA, 8 цифровых портов ввода-вывода, 8 аналоговых портов ввода.

Также к Robotino возможно подключение лазерных дальномеров, гироскопа и прочих устройств [2].

Во время разработки фреймворка использовались следующие средства:

- Java, высокоуровневый язык объектно-ориентированного программирования. Он имеет внутреннюю поддержку сетевого взаимодействия, а также мощные стандартные библиотеки. Кроме того, в Java возможно создание оконных приложений. В связи с этим Java являлся подходящим языком для реализации поставленной задачи. В настоящее время Java-технологии находят широкое применение в различных сферах. Это, в первую очередь, вызвано особенностями создания и запуска Java-приложений [3];

- Maven – это инструмент для сборки Java проекта: компиляции, создания jar, создания дистрибутива программы, генерации документации. Простые проекты можно собрать в командной строке. Если собирать большие проекты с командной строки, то команда для сборки будет очень длинной, поэтому её иногда записывают в bat/sh скрипт. Но такие скрипты зависят от платформы. Для того чтобы избавиться от этой зависимости и упростить написание скрипта используют инструменты для сборки [4];

- JavaFX – платформа для создания RIA(RichInternetApplication), позволяет строить унифицированные приложения с насыщенным графическим интерфейсом пользователя для непосредственного запуска из-под операционных систем, работы в браузерах и на мобильных телефонах, в том числе, работающих с мультимедийным содержимым;

- Guava – набор open-source библиотек для Java, помогающий избавиться от часто встречающихся шаблонов кода.

- VoofCV – библиотека компьютерного зрения с открытым исходным кодом, написанная на Java. Алгоритмы, используемые внутри, хорошо оптимизированы и, как показывает практика, по скорости в некоторых случаях не уступают реализации на C++ OpenCV.

- Spring Framework (или коротко Spring) – универсальный фреймворк с открытым исходным кодом для Java-платформы. Этот фреймворк предлагает последовательную модель и делает её применимой к большинству типов приложений, которые уже созданы на основе платформы Java. Считается, что Spring реализует модель разработки, основанную на лучших стандартах индустрии, и делает её доступной во многих областях Java.

**Результаты и их обсуждение.** В процессе работы были рассмотрены технологии в мобильной робототехнике и дополнительные возможности автоматизации склада. На основании проведенного анализа разработана структура модульного принципа построения системы программирования мобильных робототехнических платформ с использованием языка Java. Это позволит оптимизировать составление проектных решений и программирование безрельсовых мобильных систем. Были разработаны следующие группы программных модулей:

- базовые модули движения;
- базовые модули работы с изображением от камеры;
- базовые модули с использованием одометра;
- базовые модули с использованием датчиков расстояния;
- базовые модули с использованием оптических датчиков.

**Заключение.** В результате работы был разработан фреймворк, являющийся универсальной программой – структурой с множеством predefined модулей, соединяя которые возможно быстро составить решение требуемой задачи. При отсутствии требуемых модулей возможно создание пользовательских модулей с требуемой функциональностью. Это позволяет оптимизировать составление проектных решений и программирование безрельсовых

мобильных систем. Поэтому ее можно применять на производстве, складах и автоматизированных линиях.

1. Java framework для мобильной робототехнической платформы Robotino / Замжицкий, О.С.; Якубовский, М.П.; Ринейский, К.Н. // Материалы докладов 50 Международной научно-технической конференции преподавателей и студентов, Витебский государственный технологический университет, 2017.
2. Разработка программного и методического обеспечения робототехнического лабораторного комплекса / Литовко, С.Ю.; Замжицкий, О.С.; Ланин, С.С.; Шеенок, В.Ю.; Якубовский, М.П.; Кузнецов, А.А.; Ринейский К.Н. // Материалы докладов 48 Международной научно-технической конференции преподавателей и студентов, Витебский государственный технологический университет, 2015. – С. 104–105.
3. Java Software (перевод) [Электронный ресурс] - Режим доступа: <https://www.oracle.com/ru/java/index.html> – Дата доступа: 19.07.2016.
4. Apache Maven Project (перевод) [Электронный ресурс] - Режим доступа: <https://maven.apache.org/> – Дата доступа: 03.05.2017.

## МОДЕЛИРОВАНИЕ В ПРОЦЕССЕ АНАЛИЗА И ОЦЕНКИ ЭКОНОМИЧЕСКОЙ БЕЗОПАСНОСТИ ПРЕДПРИЯТИЯ

*Е.Н. Лебедева, М.А. Демидова  
Витебск, УО «ВГТУ»*

Условия рыночной экономики, в которых осуществляют свою деятельность производственные единицы, неопределенны и непредсказуемы. Поэтому от точной идентификации угроз, от правильного выбора измерителей их проявления, то есть системы показателей для мониторинга (индикаторов) экономических угроз, зависит степень адекватности оценки экономической безопасности организации, а также комплекс необходимых мер по предупреждению и планированию опасности, соответствующих её масштабу и характеру.

Цель исследования – построение интегрального показателя уровня экономической безопасности организации

**Материал и методы.** Материалом для написания статьи послужили труды отечественных и зарубежных экономистов, а также данные статистической отчетности о результатах работы белорусских предприятий за 2010–2017 гг. Используются методы анализа, синтеза, методы математического моделирования, методы средней арифметической, средней геометрической, рейтинговой оценки, таксономического анализа, радара, эвристических методов.

**Результаты и их обсуждение.** Анализ академической литературы позволил выделить три основных подхода к определению составляющих экономической безопасности предприятия (организации): системный, ресурсный и функциональный. Различные подходы предполагают разный набор составляющих экономической безопасности, однако некоторые, наиболее важные компоненты, повторяются в качестве составных частей во всех трех подходах. Разделим их на три группы: показатели технико-технологической безопасности организации; показатели финансовой безопасности организации; показатели социальной безопасности организации. Каждая такая группа может выступать в своем роде совокупным индикатором ряда входящих в него показателей и отражать состояние конкретного вида экономической безопасности организации: технико-технологической, финансовой и социальной.

Таким образом, можно выделить индикаторы производства, связанные с состоянием технико-технологической безопасности организации; финансовые индикаторы, отражающие финансовую безопасность, и социальные индикаторы, характеризующие социальную безопасность организации (табл. 1).

Нами была разработана методика построения интегрального показателя, который бы по возможности давал наиболее полный ответ относительно уровня экономической безопасности организации.



Таблица 1 – Индикаторы экономической безопасности предприятий

Индикаторы экономической безопасности предприятия	Показатели экономической безопасности предприятия
экономической безопасности производства	динамика производства; реальный уровень загрузки производственных мощностей; доля НИОКР в общем объеме работ; доля НИР в общем объеме НИОКР; коэффициент реновации; стабильность производственного процесса; удельный вес производства в ВВП (для особо крупных организаций-монополистов); оценка конкурентоспособности продукции; возрастная структура и технический ресурс парка машин и оборудования.
финансовой безопасности	объем “портфеля” заказов; фактический и необходимый объем инвестиций; уровень инновационной активности; уровень рентабельности производства; капиталоемкость производства; просроченная задолженность; доля обеспеченности собственными источниками финансирования оборотных средств.
социальной безопасности	уровень оплаты труда по отношению к среднему показателю по промышленности или экономике в целом; уровень задолженности по зарплате; потери рабочего времени; структура кадрового потенциала.

Источник: авторская разработка

В соответствии с принятым нами методическим подходом интегральные индексы рассчитываются как средняя геометрическая из отдельных индексов экономической безопасности по каждому индикатору и году соответственно. Расчет производится по следующей формуле (1):

$$I_{ES} = \sqrt[r]{I_{ES_1} \cdot I_{ES_2} \cdot \dots \cdot I_{ES_m}} \quad (1)$$

где  $I_{ES}$  – индекс экономической безопасности организации;

$I_{ES_1}, I_{ES_2}, \dots, I_{ES_m}$  – индексы первой, второй, m-мой групп показателей соответственно;

r – количество индексов групп показателей;

m – год, за который анализируются индексы.

В свою очередь, индекс группы показателей находится по формуле (2):

$$I_{ES_m} = \sqrt[n]{i_1 \cdot i_2 \cdot \dots \cdot i_n} \quad (2)$$

где  $I_{ES_m}$  – индекс m-мой группы показателей;

$i_1, i_2, i_n$  – индекс первого, второго n-ного показателя соответственно;

n – количество индексов показателей;

m – год, за который анализируются индекс.

Согласно рассчитанному интегральному индексу делается вывод о текущем состоянии экономической безопасности организации, причем, если у более, чем одного показателя  $I_{ES_m} < 1$ , то состояние оценивается как **кризисное**;  $I_{ES_m} < 1$  хотя бы у одного показателя указывает на **предкризисное** состояние экономической безопасности;  $I_{ES_m} > 1$  – состояние экономической безопасности анализируемой организации **нормальное (стабильное)**.

**Заключение.** Использование такой методики позволит осуществить комплексный анализ экономической безопасности предприятия, вовремя диагностировать экономические угрозы организации и на этой основе разработать наиболее адекватный комплекс необходимых мер по предупреждению и планированию опасности, соответствующих масштабу и характеру этих угроз.

1. Lebedeva, E.N. The problem of uneven regional development of the republic of Belarus/E.N. Lebedeva, M.A. Lebedeva// Proceedings of II International scientific conference “World Science in 2016: Results”. Morrisville, Lulu Press., 2017. PP 150-155.
2. Система показателей экономической эффективности производства [Электронный ресурс]. – Режим доступа: [http://studopedia.ru/2\\_47223\\_sistema-pokazateley-ekonomicheskoy-effektivnosti-proizvodstva.html](http://studopedia.ru/2_47223_sistema-pokazateley-ekonomicheskoy-effektivnosti-proizvodstva.html). – Дата доступа: 13.12.2017.

## О ХАРАКТЕРИЗАЦИИ ЛОКАЛЬНО НОРМАЛЬНЫХ КЛАССОВ ФИТТИНГА

*А.В. Марцинкевич  
Витебск, ВГУ имени П.М. Машерова*

Все рассматриваемые группы конечны и разрешимы.

*Классом Фиттинга* называют класс групп  $F$ , замкнутый относительно нормальных подгрупп и произведений нормальных  $F$ -подгрупп.

В теории классов Фиттинга значительное место занимают исследования по изучению структуры классов Фиттинга, определяемых заданными свойствами инъекторов.

Напомним, что подгруппа  $V$  называется  $F$ -инъектором группы  $G$ , если для любой субнормальной подгруппы  $N$  группы  $G$  пересечение  $V \cap N$  является  $F$ -максимальной подгруппой группы  $N$ .

**Определение.** Неединичный класс Фиттинга  $F$  называется  $X$ -нормальным или *локально нормальным*, если  $F \subseteq X$  и для любой группы  $G \in X$  её  $F$ -инъектор – нормальная подгруппа группы  $G$ .

В случае, когда  $X = S$  классу всех конечных разрешимых групп, мы получаем определение нормального класса Фиттинга [1].

Класс Фиттинга  $F$  называют *нормальным* [1], если для любой группы  $G$  её  $F$ -инъекторы являются нормальными подгруппами группы  $G$ .

Основополагающей для исследований нормальных классов Фиттинга является работа Блессеноля и Гашюца [1], в которой построен ряд нетривиальных примеров нормальных классов Фиттинга и доказано, что пересечение любого множества неединичных нормальных классов Фиттинга является неединичным нормальным классом Фиттинга.

Локально нормальные классы Фиттинга впервые изучались Хауком [2] и Лауэ [3].

До настоящего времени актуальна задача нахождения общих закономерностей построения локально нормальных классов Фиттинга. В частности, характеристики таких классов.

Реализация указанной задачи – основная цель настоящей работы.

В работе используются методы доказательства абстрактной теории конечных групп, в частности, методы теории классов Фиттинга.

Пусть  $F$  – класс Фиттинга,  $G$  – группа. *Классом Фишера* называют класс  $F$ , если из того, что  $K \triangleleft G$ ,  $G \in F$ ,  $K \leq H \leq G$  и  $H/K$  –  $p$ -группа ( $p$  – простое число), следует  $H \in F$ .

Символом  $N$  будем обозначать класс всех нильпотентных групп.

Нами получена характеристика локально нормальных классов Фиттинга, которую представляет следующая

**Теорема.** Пусть  $F$  – неединичный класс Фиттинга,  $X$  – класс Фишера. Тогда следующие утверждения эквивалентны:

1)  $X \subseteq FN$ ;

2) для всех классов Фиттинга  $Y$  таких, что  $F \subseteq Y \subseteq X$ , класс  $Y$  является  $X$ -нормальным классом Фиттинга.

В настоящей работе найдены общие закономерности построения  $X$ -нормальных классов Фиттинга в случае, когда  $X$  – класс Фишера.

*Работа выполнена при поддержке БРФФИ (грант Ф17М-064).*

1. Blessohl, D. Über normale Schunk und Fittingklassen / D. Blessohl, W. Gaschütz // Math. Z. – 1970. – Bd. 118, № 1. – S. 1–8.
2. Hauck, P. Zur Theorie der Fittingklassen endlicher auflösbarer Gruppen: Dis. ... Doctor der Naturwissenschaft / P. Hauck. – Mainz, 1977. – 153 p.
3. Laue, H. Über nichtauflösbare normalen Fittingklassen / H. Laue // J. Algebra. – 1977. – Vol. 45, № 2. – P. 274–283.

## О КОНЕЧНОМ ЧИСЛЕ АТОМОВ РЕШЕТКИ ЧАСТИЧНО КОМПОЗИЦИОННЫХ ФОРМАЦИЙ

А.П. Мехович  
Витебск, ВГУ имени П.М. Машерова

Все рассматриваемые группы конечны. Используются терминология из [1 – 3].

Пусть  $X$  – произвольная непустая совокупность групп. Пересечение всех формаций, содержащих  $X$ , обозначают через  $\text{form } X$ . В частности, пишут  $\text{form } G$  в случае, когда  $X = \{G\}$ . Всякая формация такого вида называется *однопорожденной формацией* (см. [1]).

Напомним, что элемент  $a$  решетки  $L$  с нулем называется *атомом*, если для любого  $x \in L$  из  $0 < x \leq a$  следует, что  $x = a$ .

Для произвольной  $n$ -кратно  $\omega$ -композиционной формации  $F$  символом  $L_{c_n}^{\omega}(F)$  обозначают решетку всех  $n$ -кратно  $\omega$ -композиционных подформаций  $\omega$ -композиционной формации  $F$ . Если же  $F$  –  $p$ -композиционная формация, то через  $L_{c_p}(F)$  обозначают решетку всех  $p$ -композиционных подформаций  $p$ -композиционной формации  $F$ .

Доказана следующая

**Теорема 1.** Пусть  $F = c_n^{\omega} \text{form } G$  – *однопорожденная  $n$ -кратно  $\omega$ -композиционная формация*. Тогда решетка  $L_{c_n}^{\omega}(F)$  имеет лишь конечное число атомов.

**Следствие 2 [4].** Пусть  $F = c_p \text{form } G$  – *однопорожденная  $p$ -композиционная формация*. Тогда решетка  $L_{c_p}(F)$  имеет лишь конечное число атомов.

1. Скиба, А.Н. Алгебра формаций / А.Н. Скиба. – Минск : Беларуская навука, 1997. – 240 с.
2. Doerk, K. Finite Soluble Groups / K. Doerk, T. Hawkes. – Berlin-New York : Walter de Gruyter & Co., 1992. – 891 p. – (De Gruyter Expo. Math.; vol. 4).
3. Скиба, А.Н. Кратно  $L$ -композиционные формации конечных групп / А.Н. Скиба, Л.А. Шеметков // Украинский матем. журн. – 2000. – Т. 52, № 6. – С. 783–797.
4. Воробьев, Н.Н. Композиционные формации с условием дополняемости / Н.Н. Воробьев, А.П. Мехович // Весн. Віцебскага дзярж. ун-та. – 2012. – № 5 (71). – С. 15–18.

## РАЗРАБОТКА И ИССЛЕДОВАНИЕ МОДЕЛИ МНОГОСЕКЦИОННОГО ЭКРАНИРОВАННОГО КОНДЕНСАТОРА

А.М. Науменко, В.С. Туманов  
Витебск, УО «ВГТУ»

Електроёмкостные датчики широко используются в неразрушающем контроле физических, физико-механических свойств материалов, таких как влагосодержание, пористость, влажность. Диэлектрическая спектроскопия широко используется для исследования электрофизических параметров диэлектрических проводящих сред, изучения механизма кинетики химических реакций и фазовых переходов. Актуальным направлением развития емкостных методов измерения является разработка датчиков на основе ленточных электродов, обеспечивающих многопараметровый контроль, высокую точность измерения анизотропии диэлектрических свойств, регулирование глубины зоны контроля.

Целью работы является разработка математической модели, позволяющей прогнозировать метрологические характеристики при проектировании многосекционных экранированных конденсаторов.

**Материал и методы.** Основу датчика составляют ленточные электроды, расположенные на экранированной подложке. Сечение датчика представлено на рисунке 1. В основании подложки находится плоский заземленный электрод охраны 3. Дополнительный плоский заземленный экран размещен наверху контролируемого диэлектрического слоя 4. Он является подвижным. В экспериментальной установке его положение фиксируется с помощью микрометрического винта. Электрическое поле, создаваемое высокопотенциальными электродами 1, проникая через материал, замыкается на низкопотенциальных электродах 2. Оно ограничено в пространстве плоскими электродами 3 и 4. Низкопотенциальные электроды 2

имеют потенциал земли  $V_2$ . В отсутствие дополнительного экрана 4, глубина зоны контроля определяется геометрическими размерами секции датчика и не превосходит половины ее ширины  $r$ . Введение в конструкцию дополнительного заземленного экрана над контролируемым материалом изменяет глубину проникновения поля, характер поля не только в области контроля, но и в подложке [1].



Рисунок 1 – Модель емкостного датчика

Для определения метрологических характеристик конденсатора разработана математическая модель, учитывающую толщину и ширину электродов, межэлектродный зазор, расстояние между подложкой и экраном, толщину подложки, диэлектрическую проницаемость материалов. Будем полагать, что материал подложки не диспергирующий, то есть, диэлектрическая проницаемость подложки не является функцией частоты электромагнитного поля. Так как поверхности электродов эквипотенциальны, представив электроды в виде зеркально-симметричных бесконечно тонких электродов. Решение системы интегральных уравнений связанных зарядов с использованием методов зеркальных отображений и Крылова – Боголюбова дает значения функций распределения поверхностных зарядов  $\sigma_1(x)$ ,  $\sigma_2(x)$ , ...  $\sigma_i(x)$  [2].

Для моделирования была разработана программа с использование системы компьютерной математики MAPLE 17. Исходные данные для расчета: толщина электродов равна 25 мкм; ширина электродов равна межэлектродному зазору и варьируется 1–4 мм; расстояние между подложкой и экраном 2–10 мм; толщина подложки 1–4 мм, диэлектрическая проницаемость подложки 2,5 – 4; диэлектрическая проницаемость среды 1.

**Результаты и их обсуждение.** В результате моделирования многосекционного экранированного конденсатора установлено:

1. Максимальная чувствительность к диэлектрической проницаемости обеспечивается при расстоянии между пластинами в два раза больше, чем ширина электродов.
2. При увеличении расстояния между подложкой и экраном чувствительность к диэлектрической проницаемости уменьшается, так как действие экрана ослабевает и электрическое поля становится не параллельно осям анизотропии.
3. При уменьшении расстояния между подложкой и экраном чувствительность к диэлектрической проницаемости уменьшается, так увеличивается доля электрического поля, замыкающегося на плоский заземленный экран охраны 3 в основании подложки.
4. Для уменьшения паразитной емкости, возникающей из-за прохождения электрического поля через подложки, необходимо использовать в качестве подложки материалы с низкой диэлектрической проницаемостью (фторопласт, флан).
5. Зона контроля не превышает 50%, так как часть электрического поля замыкается на плоский заземленный экран 4.

**Заключение.** Созданная модель позволяет проводить обоснованный выбор конструкции и параметров датчика, определяет метрологические характеристики измерительного устройства, решать вопрос технической осуществимости поставленной задачи.

1. Конденсатор для определения анизотропии материала по диэлектрической проницаемости: пат. № 16136 Республика Беларусь, МПК G 01 R 27/26 / А. А. Джежора, А. М. Науменко; заявитель Витебский государственный технологический университет – № а 20101026 заявл. 07.07.2010, опубл. 10.04.2012. // Афіцыйны бюл. / Нац. цэнтр інтэлектуал. уласнасці. – 2012. – № 1. – С. 29.
2. Джежора, А. А. Диэлектриметрия ортотропных материалов текстильной промышленности / А. А. Джежора, А. М. Науменко // Дефектоскопия – Russian Journal of Nondestructive Testing. – 2011. – № 12. – С. 67–76.

## САМОПОДОБНОЕ ОДНОРОДНОЕ ДВУМЕРНОЕ ЛОРЕНЦЕВО МНОГООБРАЗИЕ НЕКОММУТАТИВНОЙ ГРУППЫ ЛИ

*М.Н. Подоксенов  
Витебск, ВГУ имени П.М. Машерова*

Пусть  $(M, g)$  – риманово или лоренцево многообразие. Преобразование  $f: M \rightarrow M$  называется подобием с коэффициентом  $e^\mu$ , ( $\mu = \text{const}$ ) если для любой точки  $p \in M$  и любых векторов  $X, Y \in T_p M$  выполнено  $\langle f_* X, f_* Y \rangle_{f(p)} = e^{2\mu} \langle X, Y \rangle_p$ . Многообразие называется самоподобным, если оно допускает однопараметрическую группу подобий.

Пусть  $(G, g)$  – это однородное многообразие группы Ли, снабжённой левоинвариантной лоренцевой метрикой. Тогда преобразование  $f: G \rightarrow G$  называется гомотетическим автоморфизмом, если оно является одновременно подобием и автоморфизмом группы Ли.

Цель данного исследования: найти левоинвариантную лоренцеву метрику на связной двумерной некоммутиативной группе Ли, при которой группа Ли превращается в самоподобное лоренцево многообразие. В дальнейшем эта метрика может быть расширена для трёх- и четырёхмерных групп Ли.

**Материал и методы.** Рассматривается двумерная некоммутиативная алгебра Ли, снабжённая лоренцевым скалярным произведением. Находится её однопараметрическая группа гомотетий, являющаяся автоморфизмом алгебры Ли и с её помощью строится однопараметрическая группа гомотетий однородного лоренцева многообразия двумерной некоммутиативной группы Ли. В исследовании применяются методы аналитической и дифференциальной геометрии, а также методы линейной алгебры.

**Результаты и их обсуждение.** Если лоренцева группа Ли является экспоненциальной, то любой её гомотетический автоморфизм порождается гомотетическим автоморфизмом её алгебры Ли (необходимые определения можно найти в [1]).

Существует единственная с точностью до изоморфизма некоммутиативная двумерная алгебра Ли  $\mathcal{G}$ . В подходящем базисе  $(E_1, E_2)$  коммутационные соотношения задаются одним равенством:  $[E_1, E_2] = E_2$ . Можно доказать, что эта алгебра Ли  $\mathcal{G}$  допускает гомотетические автоморфизмы в единственном случае, когда вектор  $E_2$  изотропен. Можно выбрать базис  $(E_1, E_2)$  так, что при тех же коммутационных соотношениях матрица Грама будет иметь вид  $\Gamma = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ , а однопараметрическая группа гомотетических автоморфизмов  $F(t): \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{G}$  будет задаваться матрицами  $\mathbf{F}(t) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{2\mu t} \end{pmatrix}$ ,  $\mu = \text{const}$ ,  $\mu \neq 0$ .

Некоммутиативную двумерную алгебру Ли  $\mathcal{G}$  можно представить, как состоящую из матриц вида  $\begin{pmatrix} u_1 & u_2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ , и при этом

$$E_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, E_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (1)$$

Соответствующая ей связная односвязная группа Ли  $G$  может быть представлена, как группа аффинных преобразований прямой  $A^+(1)$ , сохраняющих ориентацию прямой, или как группа матриц вида  $\begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ ,  $x_1 > 0$ , с операцией умножения матриц. Введём на  $\mathcal{G}$  и  $G$  координаты, сопоставив приведённым выше матрицам координаты  $(u_1, u_2)$  и  $(x_1, x_2)$  соответственно.

Единичному элементу группы соответствуют координаты  $(1, 0)$ . Тогда групповая операция, экспоненциальное отображение  $\exp: \mathcal{G} \rightarrow G$  и обратное отображение  $\exp^{-1}: G \rightarrow \mathcal{G}$  задаются соответственно формулами

$$\begin{cases} (x_1, x_2) \cdot (y_1, y_2) = (x_1 y_1, x_1 y_2 + x_2) \\ \begin{cases} x_1 = e^{u_1}, \\ x_2 = \frac{u_2}{u_1}(e^{u_1} - 1), \end{cases} \end{cases} \begin{cases} u_1 = \ln x_1, \\ u_2 = \frac{x_2}{x_1 - 1} \ln x_1, \end{cases}$$

с уточнением, что  $\exp(0, u_2) = (1, u_2)$ .

Нетрудно вычислить, что дифференциал экспоненты в нуле задаётся единичной матрицей. Это приводит к тому, что отображения

$$f(t) = \exp \circ F(t) \circ \exp^{-1}: G \rightarrow G$$

задаются формулами

$$\begin{cases} x'_1 = x_1, \\ x'_2 = e^{2\mu} x_2. \end{cases} \quad (2)$$

Метрический тензор, как доказано в [3], задаётся матрицей

$$(g_{ij}) = \begin{pmatrix} x_1^{-2} & 0 \\ 0 & x_1^{-2} \end{pmatrix}, \quad (3)$$

Легко проверить, что преобразования  $f(t), t \in \mathbf{R}$  образуют не только однопараметрическую группу подобий, но и автоморфизмов группы Ли тоже.

Итак, имеет место теорема.

**Теорема.** *На связной односвязной двумерной некоммутативной группе Ли существует левоинвариантная лоренцева метрика, при которой эта группа превращается в самоподобное многообразие. В подходящей карте все однопараметрические группы подобий, являющиеся автоморфизмами группы Ли, задаются формулами (2) а метрический тензор – матрицей (3).*

Произвольная однопараметрическая группа подобий рассматриваемого многообразия может быть представлена в виде  $(L_g) \circ f(t) \circ (L_g)^{-1}, g \in G$ . Если элемент  $g$  имеет координаты  $(g_1, g_2)$ , то эта группа действует по правилу  $(x_1, x_2) \rightarrow (x_1, e^{2\mu} x_2 - g_2(e^{2\mu} - 1))$ .

Заметим, что общий вид метрик однородных самоподобных односвязных многообразий был описан Д. Алексеевским [2]. С.П.Гавриловым [3] были найдены геодезические всех инвариантных метрик на двумерной некоммутативной группе Ли, включая рассматриваемый в данной работе тип метрик. Результаты Д. Алексеевского были дополнены автором этой работы [4] для случая неодносвязных многообразий.

В рассматриваемой группе Ли элементы с координатами  $(1, k)$ , которые задают сдвиги прямой, образуют нормальную подгруппу. Также нормальную подгруппу  $H$  образуют такие элементы при  $k \in \mathbf{Z}$ . Тем самым мы можем рассмотреть группу Ли  $G/H$ , которая гомеоморфна цилиндру. В связи с тем, что метрический тензор не зависит от  $x_2$ , метрику можно перенести с помощью накрытия  $G \rightarrow G/H$ . Другими словами, мы можем сделать координату  $x_2$  циклической с любым периодом. Однако, новая неодносвязная группа Ли не допускает преобразований вида (2), т.е. не подпадает под класс многообразий, рассмотренных в [4].

Возможна ситуация, когда подходящий нам базис будут составлять другие матрицы, нежели (1). Тем не менее, мы можем ввести на рассматриваемых алгебре Ли и группе Ли координаты так, что групповые операции, экспоненциальное отображение и метрический тензор будут задаваться теми же формулами, а, следовательно, и однопараметрические группы гомотетий будут задаваться теми же формулами (3).

**Заключение.** В данной работе найдена лоренцева метрика на двумерной связной односвязной некоммутативной группе Ли, при которой эта группа Ли допускает однопараметрическую гомотетических автоморфизмов, и тем самым, она является самоподобным многообразием.

1. Подоксёнов М.Н. Подобия и изометрии однородного многообразия группы Гейзенберга, снабжённой левоинвариантной лоренцевой метрикой / М.Н.Подоксёнов // Вестник ВГУ – №5 – 2011, – С.10-15.
2. Alekseevski D. Self-similar Lorentzian manifolds / D.Alekseevski // Ann.of Global Anal.Geom.– 1985 – V.3, No.1, С.59–84.
3. Гаврилов С.П. Геодезические левоинвариантных метрик на связной двумерной неабелевой группе Ли / С.П.Гаврилов // Гравитация и теория относительности – Вып.19.– Казань: Изд-во КГУ, 1981.– С.28-44.
4. Подоксёнов М.Н. Лоренцево многообразие с однопараметрической группой гомотетий имеющей замкнутую изотропную орбиту / М.Н.Подоксёнов // Сиб. матем. журн.– т.30, №5,– С.135-137.

## МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ КРИПТОВАЛЮТ

С.А. Прохожий  
Витебск, ВГУ имени П.М. Машерова

Человеческое общество всегда невозможно было представить без денег. Деньги – это специфический товар максимальной ликвидности, который является универсальным эквивалентом стоимости других услуг или товаров. История развития денег тесно связана с развитием человеческой цивилизации. Товары, продукты и оружие, монеты различных видов (от костяных до золотых), акции, бумажные банкноты – это всего лишь часть того, что раньше использовалось человеком и до настоящего времени используется в качестве денег. С развитием информационных технологий современный мир вступил в эпоху «электронных денег», которые не выпускаются национальными центральными банками. Монеты и банкноты постепенно стали заменяться пластиковыми платежными картами, а в сети Интернет появилось множество платежных систем, изначально созданных только для электронных платежей, таких как Яндекс. Деньги, PayPal, WebMoney. Сегодня мы наблюдаем рост криптовалют – нового платежного средства XXI века, которое имеет ряд существенных отличий от других видов электронных денег [1]. Прогресс не стоит на месте, и в наше время криптовалютами пользуется множество людей во всем мире.

Целью данной работы является изучение математических принципов, на которых основана работа криптовалют, на примере биткоина.

**Материал и методы.** При написании статьи проанализированы различные источники по криптографии и шифрованию, криптовалютам, алгебре конечных полей, а также материалы из глобальной сети Интернет.

**Результаты и их обсуждение.** Рассмотрим математические принципы работы криптовалют на примере биткоина, который сегодня обладает самой разветвленной и обширной сетью и является наиболее ликвидной криптовалютой. Биткоин нематериален и не обладает привязкой к каким-либо государственным валютам, драгоценным металлам или природным ресурсам. Его курс чрезвычайно подвижен и определяется исключительно балансом спроса и предложения. оборот этой валюты не контролируется какими-либо органами, ведомствами или организациями и осуществляется исключительно между криптокошельками участников сети. Отмена транзакции монет невозможна.

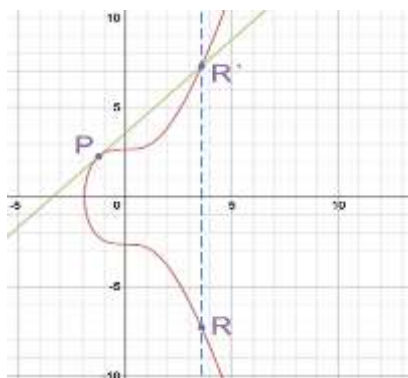
Сами по себе биткоины не хранятся ни централизованно, ни локально – и поэтому нельзя сказать, кто отвечает за их доверенное хранение. Биткоины существуют лишь как записи в распределенной бухгалтерской книге, называемой *блокчейном*, копии которой распределены среди добровольной сети подключенных компьютеров. Быть «владельцем» биткоинов просто означает иметь возможность передать контроль над этими записями кому-то еще, зафиксировав факт этой передачи на блокчейне. Что же дает эту способность? Эксклюзивный доступ к паре ключей ECDSA: секретному и публичному [2].

ECDSA (Elliptic Curve Digital Signature Algorithm) – алгоритм с открытым ключом для создания цифровой подписи, определённый в группе точек эллиптической кривой [3]. Это процесс, который использует эллиптические кривые и конечные поля, чтобы «подписать» данные таким образом, что третьи лица могут легко проверить подлинность подписи, но при этом сам подписывающий оставляет за собой эксклюзивную возможность создавать подписи. ECDSA имеет две отдельные процедуры для подписи и ее проверки. Каждая процедура представляет собой алгоритм, состоящий из нескольких арифметических операций. Алгоритм подписи использует секретный ключ, а алгоритм проверки использует только открытый ключ.

**Эллиптические кривые** – графики функции, уравнение которой имеет вид

$$y^2 = x^3 + ax + b \text{ [4].}$$

Для работы биткоина принимается  $a = 0$  и  $b = 7$ . График соответствующей эллиптической кривой, а также соответствующее этой кривой правило удвоения точки изображены на рисунке.



**Конечным полем** называется конечное множество элементов, замкнутое по отношению к двум заданным в нем операциям комбинирования элементов [5]. Под замкнутостью понимается тот факт, что результаты операций не выходят за пределы конечного множества введенных элементов.

Чтобы использовать ECDSA, такой протокол биткоина должен зафиксировать набор параметров для эллиптической кривой и ее конечного поля, чтобы эти параметры знали и применяли все пользователи протокола. Иначе каждый будет решать свои собственные уравнения, которые не будут сходиться друг с другом, и они никогда ни о чем не договорятся.

Эти зафиксированные параметры включают в себя *уравнение кривой*, значение *модуля поля* и *базовую точку*, которая лежит на кривой. Последним параметром является *порядок* базовой точки, который в графическом виде можно представить себе как количество раз, которое базовая точка может быть прибавлена к себе до тех пор, пока ее касательная кривая не станет вертикальной. Этот параметр подбирается таким образом, чтобы он являлся очень большим простым числом.

**Заключение.** В наши дни криптовалюты продолжают свое развитие, число пользователей новыми платежными средствами постоянно растет. Популярность биткоина стимулирует создание других криптовалют, которые развиваются параллельно, но их возможности и популярность пока еще намного меньше. Однако вместе с тем следует отметить, что каждая из них основана на различных математических принципах, хотя идеология блокчейна (выстроенной по определённым правилам непрерывной последовательной цепочки блоков, содержащих всю полную информацию, копии которых хранятся независимо друг от друга на множестве разных компьютеров) присутствует в любой из них.

1. Свон, М. Блокчейн. Схема новой экономики / М. Свон – М.: Олимп-Бизнес, 2017. – 240с.
2. Филиппов, Е. Криптовалюта от А до Я / Е. Филиппов. – 2017. – 50с.
3. Алгоритм ECDSA / Википедия [Электронный ресурс]. – Режим доступа: <http://ru.wikipedia.org/?oldid=90242139> (дата обращения: 12.01.2018).
4. Эллиптическая кривая / Википедия [Электронный ресурс]. – Режим доступа <http://ru.wikipedia.org/?oldid=90075838> (дата обращения: 05.01.2018).
5. Биткоин / Википедия [Электронный ресурс]. – Режим доступа: <http://ru.wikipedia.org/?oldid=90310153> (дата обращения: 15.01.2018).

## **ВЫБОР И ОПТИМИЗАЦИЯ АЛГОРИТМА СОРТИРОВКИ ДЛЯ ДОСТИЖЕНИЯ МАКСИМАЛЬНОГО БЫСТРОДЕЙСТВИЯ**

*Д.Ю. Романцов  
Орша, Оршанский колледж ВГУ имени П.М. Машерова*

Сортировка данных одна из самых распространённых задач. На данный момент существует около 40 видов сортировок [1]. Практически для всех определена временная сложность  $O$ , на основе которой можно определить их скорость. Однако из-за того, что это достаточно обобщённая характеристика, то сказать однозначно, какой алгоритм быстрее нельзя.

Целью исследования является выявление наиболее оптимального алгоритма сортировки массива данных эмпирическим способом.



**Материал и методы.** Проведём исследование в этом проблемном поле на базе наиболее известных представителей: глупая, пузырьковая, быстрая, шейкерная, гребешковая, слиянием, клоуна Бозо, простыми вставками, пирамидальная, интроспективная сортировки. В тесте участвуют множества с дробными случайно сгенерированными числами. Обозначим одно такое множество через  $A$ , его элемент как  $A_i$ , а длину  $n = |A|$ . Для улучшения статистических показателей, проведём тесты для 100 разных  $A$  одной  $n$ . При этом  $n = \{10, 100, 1000, 5000, 10000, 50000, 100000, 300000, 500000, 1000000\}$ , что даст лучшую иллюстрацию быстродействия.

Время – основной параметр, характеризующий быстродействие алгоритма. Называется также вычислительной сложностью. Для упорядочения важны худшее, среднее и лучшее поведение алгоритма в терминах мощности входного множества  $A$ . Для типичного алгоритма хорошее поведение – это  $O(n \cdot \log n)$  и плохое поведение – это  $O(n^2)$ , идеальное –  $O(n)$  [2].

В связи с тем, что алгоритмы являются достаточно простыми и используют несложные математические выражения, то стоит предположить, что время выполнения может быть достаточно небольшим. Поэтому использовать стандартные средства операционной системы (время отклика системного таймера около 10,0144 мс) не представляется возможным.

Чтобы получить точность порядка  $10^{-6}$ с или по-другому 1 нс, воспользуемся счетчиком меток реального времени процессора (Time Stamp Counter). Начиная с Pentium III, процессоры обычно содержат его в доступной программистам зоне. TSC представляет собой 64-разрядный регистр, содержимое которого с каждым тактом процессора инкрементируется. Счет начинается с нуля каждый раз при старте ЭВМ [3].

Из этого следует, что время выполнения алгоритма напрямую зависит от частоты процессора. Для соблюдения равенства условий эксперимента, все замеры будут производиться на одном компьютере с процессором Intel Pentium G620 2.6 ГГц. Для тестирования написана программа на Delphi.

**Результаты и их обсуждение.** В результате проведённых измерений получена следующая таблица:

Таблица 1 – Время работы в мс алгоритма сортировки в зависимости от объёма массива

	10	100	1k	10 k	50 k	100 k	300 k	500 k	1 М
Глупая	0,0008	0,0442	2,8009	344,48	9521,73	38180,7	>40с	>40с	>40с
Пузырьковая	0,0005	0,064	5,78	466,27	11621,31	46685,3	>40с	>40с	>40с
Шейкерная	0,0005	0,0172	0,8584	68,752	1860,28	7760,9	81998	>40с	>40с
Гребешковая	0,0008	0,011	0,14	1,73	9,5	18	52	82	155
Быстрая	0,0010	0,0140	0,1266	1,0465	5,15284	10,186	30,898	51,7092	107,106
Слиянием	0,0022	0,0145	0,1627	1,7411	8,04589	16,220	50,975	86,4585	205,061
Простыми вставками	0,0003	0,0058	0,4628	43,701	1095,38	4306,7	39390	>40с	>40с
Клоуна Бозо	113,55	12000	>40с	>40с	>40с	>40с	>40с	>40с	>40с
Пирамидальная	0,0009	0,0129	0,1707	1,7915	9,32412	19,0624	60,281	102,920	218,26
Интроспективная	0,0009	0,0116	0,1576	1,0838	5,12777	10,195	30,853	52,2175	107,170

Как видно из таблицы алгоритмы разделились на две группы: существенно и не очень зависящие от  $n$ . В отношении первой группы можно сказать, что эти алгоритмы не очень эффективны, т.к. при 50000 элементах на *глупую* сортировку или *пузырьковую* требуется около 10 секунд. *Шейкерная* и с *простыми вставками* сортировки показывают такое же время на множестве в два раза большем. Пузырьковая и глупая сортировки примерно в 5 раз менее производительны и применимы для массивов до 6-7 тыс. элементов. Сортировка *Клоуна Бозо* является «шуточной» и достаточно быстро работает для массивов длиной не более 10 элементов. Остальные сортировки показывают достаточно близкий результат и вполне применимы для массивов в 1 млн. элементов. Естественно они могут сортировать и большие массивы. Например, быстрая сортировка справляется с 10 млн элементов за 1,3 с.

Таким образом, из рассмотренных сортировок наибольшим потенциалом обладают *быстрая* и *интроспективная*. Это не случайно, поскольку интроспективная является быстрой сортировкой с контролем глубины рекурсии. Если глубина превышает установленный лимит, то быстрая сортировка останавливается и вызывается другой алгоритм, выполняющий досортировку. Выполним оптимизацию её работы по следующим направлениям: выбор лимита глубины рекурсии; уменьшение количества математических операций; выбор запасного алгоритма досортировки.

Лимит глубины рекурсии  $N$  можно установить по-разному. Автор алгоритма Дэвид Мюссер предложил ориентироваться на величину  $N = \log(n)$  [1]. Почему предложен именно десятичный логарифм не совсем понятно, т.к. в процессе выполнения рекурсивно вызываются 2 функции для левого и правого подмножеств, поэтому получается бинарное дерево, глубина которого определяется как  $N = \log_2(n)$ . В этом случае, например, для массива  $n = 1$  млн.  $N = 20$ . Здесь следует осознать тот факт, что между  $n$  и  $N$  есть прямая связь. Чем больше  $n$ , тем больше  $N$ , следовательно, вычислять текущую глубину с помощью  $\log_2(n)$  на каждом шаге не будем, так как эта операция не очень быстрая. Вместо этого заведём счётчик числа вызовов функции сортировки подмножества. Когда значение счётчика превысит объём массива, то будем считать, что произошло переполнение и вызовем второй алгоритм. Для увеличения значения счётчика используем операцию  $+$ , вместо инкремента  $\text{inc}()$ . Измерения проводились при  $n = 500$  тыс.

Таблица 2 – Замер времени при оптимизации

	Начальная реализация	Переход на + вместо $\text{inc}()$	Переход от $\log_2$ к объёму	Динамическое измен. границы
Время, мс	64,449	64,377	63,402	52,218

Дэвид Мюссер в своей работе указал, что запасным алгоритмом следует использовать *пирамидальную* сортировку, т.к. она всегда сортирует за  $n \cdot \log(n)$ . Однако в тесте выше было показано, что гребешковая и сортировка слиянием в среднем работают быстрее, поэтому проверим все 3 вида сортировок. Худший результат оказался именно у пирамидальной.

Таблица 3 – Результаты теста работы с запасным алгоритмом

	Быстрая без ограничения	Быстрая + пирамидальная	Быстрая + гребешковая	Быстрая + слиянием
Время, мс	10,452	23,471	14,223	18,099

**Заключение.** Проведённые измерения показывают, что наиболее быстродействующими алгоритмами без использования распараллеливания являются быстрая и интроспективная сортировки. В качестве запасного алгоритма для интроспективной выбираем гребешковую сортировку.

1. Описание алгоритмов сортировок [Электронный ресурс]: Коллекция сортировок / Валерий Макаров. – РФ, 2015. – Режим доступа: <http://sorting.valemak.com>. – Дата доступа: 15.12.2017.
2. Седжвик, Р. Фундаментальные алгоритмы на С. Ч. 1–4. Анализ. Структуры данных. Сортировка. Поиск [Текст] : Пер. с англ. / Роберт Седжвик. – СПб. : ООО «ДиаСофтЮП», 2003. – 672 с.
3. Точное время: измеряем, применяем [Электронный ресурс]: Социальное Интернет СМИ об IT / begin\_end. – РФ, 2009. – Режим доступа: <http://habrahabr.ru/post/75234/>. – Дата доступа: 15.12.2017.
4. Musser, D. Introspective Sorting and Selection Algorithms / D. Musser // Software: Practice and Experience. – 1997. – August, volume 27, issue 8. – Pages 983–999.

## О ИЗМЕРЕНИЯХ ВРЕМЕННЫХ ЗАТРАТ АЛГОРИТМОВ, РЕАЛИЗОВАННЫХ НА ЯЗЫКАХ ВЫСОКОГО УРОВНЯ

М.Г. Семёнов  
Витебск, ВГУ имени П.М. Машерова

Сравнение производительности различных алгоритмов является важной задачей при изучении таких дисциплин, как «Методы алгоритмизации и программирования», «Алгоритмы и структуры данных», «Вычислительные методы», а также при разработке программного обеспечения. Одной из наиболее важных характеристик производительности являются

временная сложность, которая характеризует скорость работы. Классически для оценки временной сложности применяется асимптотический подход. Суть данного подхода заключается в асимптотической оценке скорости работы, как функции от размера входных данных. Однако, поведение алгоритмов, принадлежащих одному классу по сложности в асимптотической терминологии, могут иметь значительные различия в скорости для недостаточно больших объемов входных данных.

Альтернативами асимптотическому методу является подсчет числа элементарных операций (для итерационных алгоритмов возможен подсчет числа итераций). Стоит отметить, что в таком подходе определенную сложность вызывает выбор элементарной операции. Например, операции сложения и деления значительно отличаются необходимым для своего выполнения временем. В то же время, если при оценке временных затрат полностью пренебречь операциями, требующими относительно небольшое время, то, при большом количестве таких операций, возможна значительная погрешность. Кроме того, даже при одинаковом количестве элементарных операций языка высокого уровня, временные затраты могут отличаться в несколько раз за счет особенностей работы аппаратного обеспечения.

Наиболее общим методом является непосредственное измерение временных затрат, необходимых на работу конкретной реализации некоторого алгоритма. Стоит отметить, что, при реализации алгоритма на языке высокого уровня, во время преобразования исходного кода в машинный может произойти ряд не всегда очевидных оптимизаций, что может существенно повлиять на результаты измерений, по сравнению с рассчитанными теоретически. Особенности измерения временных затрат в таких ситуациях и посвящена настоящая работа.

В настоящей работе в качестве технологий разработки применяется программная платформа .NET и язык программирования C#, однако несложно перенести основные результаты на другие языки высокого уровня.

Цель работы – проанализировать методические особенности измерения временных затрат алгоритмов, реализованных на языках высокого уровня, и спроектировать архитектуру приложения, которое будет производить такого рода измерения. Такое приложение позволит производить эффективное сравнение алгоритмов, как в исследовательских целях, так и в выявлении слабых сторон программных продуктов, разрабатываемых в рамках курсовых, дипломных и магистерских проектов с целью улучшения их производительности.

**Материал и методы.** В исследовании в качестве рабочего материала использовались различные источники: публикации IT-специалистов, видео-материалы, официальная документация и интернет-ресурсы. Применялись такие методы, как изучение и обобщение опыта работы специалистов, статистические методы, объектно-ориентированные методы разработки и аспектно-ориентированная парадигма.

**Результаты и их обсуждение.** При измерении временных затрат можно выделить следующие этапы: постановка задачи, выбор метрики и инструментов, проведение эксперимента, анализ результатов и выводы.

Одной из ключевых характеристик при выборе инструмента измерения является его разрешающая способность, т.е. минимальный интервал времени различимый инструментом. Зачастую при проведении измерений на программной платформе .NET применяются классы System.DateTime (метод UtcNow()) и System.Diagnostics.Stopwatch (метод GetTimeStamp()). Абсолютные значения разрешающих способностей данных инструментов зависят от аппаратного и программного обеспечения, однако на большинстве систем Stopwatch.GetTimeStamp() значительно опережает [2] своего конкурента.

Для этапа проведения эксперимента отметим следующие особенности:

измерения для различных алгоритмов и исходных данных, результаты которых предполагается сравнить, должны проходить при одинаковых условиях: версии операционной системы, компилятора, CLR, JIT, GC, а также аппаратного обеспечения и режима сборки (рекомендуется release, а не debug);

измерения необходимо проводить при максимальном уровне производительности системы, закрыв все посторонние приложения и отключив службы проверки и установки обновлений, антивирусные службы;

при измерении слишком быстрых алгоритмов (время работы которых имеет порядок разрешающей способности) рекомендуется замерять не каждый вызов, а множество вызовов и вычитать время холостого прогона цикла;

измерения должны повторяться множество раз для одних и тех же условий (результатом эксперимента в таком случае является выборка, а не одно значение измерения);

при использовании JIT-компиляции результаты измерения первого вызова не учитываются, поскольку они будут завышены.

На этапе анализа результатов применяются различные статистические методы и вычисляются числовые характеристики выборки полученной по итогам проведения эксперимента. При анализе результатов, особое внимание следует уделять оптимизациям, которые могут существенно влиять на результаты измерений и зависят от версии JIT и аппаратного обеспечения.

Как можно заметить, на этапе проведения эксперимента существует много однотипных действий, которые необходимо выполнить. В рамках данной работы разработана архитектура приложения, направленного на автоматизацию значительной части процесса эксперимента.

**Заключение.** Временные затраты – важная характеристика алгоритмов. В современных условиях, при наличии дополнительных слоев абстракций между исходным кодом на языке высокого уровня и машинным кодом, реальные временные затраты могут значительно отличаться от расчетных. В работе выявлены основные этапы процесса измерения временных затрат и их особенности, а также способ автоматизации данного процесса.

1. Cormen, T. Introduction to Algorithms // T.H. Cormen, Ch.E. Leiserson, R.L. Rivest, C. Stein – 3rd Edition. – MIT Press, 2009. – 1292 p.
2. Acquiring high-resolution time stamps [Электронный ресурс]: Microsoft development network – Режим доступа: <https://msdn.microsoft.com/library/windows/desktop/dn553408.aspx> – Дата доступа: 19.12.2017.

## КОДИРОВАНИЕ ТЕКУЩЕГО СОСТОЯНИЯ ДЕТЕРМИНИРОВАННОГО КОНЕЧНОГО АВТОМАТА ЗНАЧЕНИЕМ СЧЕТЧИКА КОМАНД

*С.В. Сергеенко  
Витебск, ВГУ имени П.М. Машерова*

При анализе текста широкое распространение получили регулярные языки и описывающие их регулярные выражения [1]. Актуальным способом эффективного сопоставления текста с заданным регулярным выражением является использование алгоритма, построенный на основе детерминированного конечного автомата, который представляет собой математическую модель, обладающую относительно простой операционной семантикой. [2]

Цель исследования – выяснить возможность реализации детерминированного конечного автомата, в которой текущее состояние кодируется значением счетчика команд. То есть предоставить компилятору как можно больше информации о поведении конечного автомата.

**Материал и методы.** Материалом исследования служит детерминированный конечный автомат, его программная реализация на языке C++, в которой текущее состояние автомата задается значением счетчика команд. Поставленная цель достигается средствами обобщенного программирования посредством шаблонов в языке программирования C++. Кроме того, были использованы методы математического моделирования и общенаучные методы.

**Результаты и их обсуждение.** Алфавит и набор состояний конечного автомата, а также типы входного потока и получаемого результата задаются как псевдонимы типов, объявленные в рамках класса, указываемого как параметр шаблона класса Common, инкапсулирующего реализацию детерминированного конечного автомата. Для удобства дальнейшего использования, общий для различных конечных автоматов код вынесен в пространство имен DFA. Кроме того, введен вспомогательный шаблон класса DfaTraits, отвечающий за определение базовых типов, на которых основано определение класса Common.

```
namespace DFA {  
    template<class States, class CharT, class Result = bool,  
            class CharTraits=std::char_traits<CharT>>
```

```

struct DfaTraits {
typedef States state_type;
typedef CharT alphabet_type;
typedef Result result_type;
typedef CharTraits alphabet_traits;
static const result_type
    declined_result_value = result_type();
};
template<class Traits>
struct Common {
typedef Traits dfa_traits;
typedef typename Traits::result_type result_type;
typedef typename Traits::alphabet_type alphabet_type;
typedef typename Traits::alphabet_traits
    alphabet_traits;
typedef typename Traits::state_type state_type;
typedef std::basic_istream<alphabet_type,
    alphabet_traits> stream_type;
private:
    stream_type &s;
public:
    Common(stream_type &is) : s(is) {}
template<state_type st>
    result_type read() {
        typename alphabet_traits::int_type
            ch = s.get();
        if (ch == alphabet_traits::eof()) return check<st>();
        return next<st>(ch);
    }
protected:
template<state_type st>
    result_type check() {
        return dfa_traits::declined_result_value;
    }
template<state_type st>
    result_type next(alphabet_type ch) {
        return read<dfa_traits::dead_state>();
    }
};
}

```

Класс Common, инкапсулирующий реализацию конечного автомата, содержит ссылку на входной поток символов, а также шаблоны методов read, next и check, отвечающие, соответственно, за чтение очередного символа, определение очередного состояния и определение результата считывания строки при указанном в качестве параметра шаблона состоянии.

Выше описанный код применим при реализации любого детерминированного конечного автомата. Рассмотрим далее, как дополнить этот код для реализации некоторого конкретного конечного автомата. Нам необходимо определить тип, значения которого будут соответствовать состояниям конечного автомата, и класс, предназначенный для указания в качестве шаблонного параметра класса Common. Затем необходимо выполнить специализацию шаблонных функций next и check, чтобы задать функцию переходов и множество заключительных состояний конечного автомата.

```

enum states { q0, q1, q2 };
typedef DFA::DfaTraits<states, char> Dfa0Traits;
namespace DFA {

```

```

template<> template<>
bool Common<Dfa0Traits>::next<q0>(char ch) {
    switch(ch) {
        case 'e': return read<q0>();
        case 'a': case 'c': case 'f': return read<q1>();
        default: return read<q2>();
    }
}
template<> template<>
bool Common<Dfa0Traits>::next<q1>(char ch)
{
    switch(ch) {
        default: return read<q0>();
        case 'a': return read<q1>();
        case 'e': case 'f': return read<q2>();
    }
}
template<> template<>
bool Common<Dfa0Traits>::next<q2>(char ch)
{
    switch(ch) {
        case 'b': case 'c': case 'd': return read<q0>();
        default: return read<q1>();
        case 'f': return read<q2>();
    }
}
template<> template<>
bool Common<Dfa0Traits>::check<q2>() { return true; }
}

```

Для использования полученной реализации конечного автомата необходимо сначала создать объект класса `Common<Dfa0Traits>`, передав параметром конструктору поток входных символов, а затем вызвать метод `read<q0>` этого объекта, где `q0` – значение соответствующее стартовому состоянию конечного автомата.

**Заключение.** Для каждого используемого набора аргументов шаблона функции компилятором будет создаваться фрагмент кода, размещаемого по отдельному диапазону адресов. Следовательно, значение счетчика команд при выполнении результирующего кода будет определять значение шаблонного параметра, обозначающего текущее состояние конечного автомата.

1. Фридл, Дж. Регулярные выражения / Дж. Фридл. – СПб : «Питер», 2001. – 352 с.
2. Компиляторы: принципы, технологии и инструментарий / А. В. Ахо, М. С. Лам, Р. Сети, Дж. Д. Ульман. – 2-е изд. : Пер. с англ. – М. : ООО «И. Д. Вильямс», 2008. – 1184 с.

## ПРИМЕНЕНИЕ РАСХОДЯЩИХСЯ СТЕПЕННЫХ РЯДОВ ДЛЯ ПОЛУЧЕНИЯ ФОРМУЛ ПРИБЛИЖЕННОГО НАХОЖДЕНИЯ РЕШЕНИЙ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

*Ю.В. Трубников, М.М. Чернявский, А.М. Воронов  
Витебск, ВГУ имени П.М. Машерова*

Как известно, получение точного аналитического выражения корней алгебраического уравнения пятой и более высоких степеней через его коэффициенты является невозможным (теорема Абеля) [1, с. 103]. Численные алгоритмы решения алгебраических уравнений в своем большинстве являются итерационными, поэтому они не всегда удобны для применения на практике, поэтому актуальным является получение прямых алгоритмов нахождения

приближенного решения алгебраического уравнения, выраженного через коэффициенты исходного уравнения.

До настоящего времени подобных алгоритмов существует достаточно мало. Среди них следует выделить, например, алгоритм Бернулли нахождения наибольшего по модулю решения алгебраического уравнения и « $r/\varphi$ -алгоритм», предлагаемый В.И. Шмойловым [2]. Последний алгоритм позволяет получать приближенное решение в виде цепной дроби, что не всегда удобно для использования на практике. В связи с этим, в настоящей работе была поставлена цель – разработать новый прямой алгоритм нахождения корня алгебраического уравнения через его коэффициенты.

**Материал и методы.** Материалом исследования являются прямые алгоритмы приближенного нахождения корней данных уравнений. Методы исследования – методы математического анализа с использованием системы компьютерной математики *Maple 2015*.

**Результаты и их обсуждение.** В теории разложения функций комплексного аргумента в степенные ряды возникает следующая теорема, которая играет важную роль в построении некоторых алгоритмов приближенного нахождения решения алгебраических уравнений [3].

**Теорема.** Пусть  $f(x)$  – многочлен комплексного аргумента степени  $n$ , и пусть разложение функции  $\frac{1}{f(x)}$  в ряд Тейлора имеет вид (1):

$$\frac{1}{f(x)} = \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k. \quad (1)$$

Тогда если  $f(x)$  имеет только один минимальный по модулю корень, например,  $|x_1| < |x_2| \leq |x_3| \leq \dots \leq |x_n|$ , то в минимальной по модулю точке  $x_1$  расхождения ряда (1) предел отношения соседних слагаемых ряда (1) стремится к единице с увеличением их порядкового номера, то есть справедливо выражение (2):

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \frac{c_m x^m}{c_{m+1} x^{m+1}} = 1. \quad (2)$$

Следствием из данной теоремы является тот факт, что если  $x_*$  является минимальным по модулю корнем алгебраического уравнения  $f(x) = 0$ , учитывая (2), для некоторого  $m$ -го слагаемого ряда (1) можно приближенно считать

$$\frac{c_m}{c_{m+1} x_*} \approx 1,$$

следовательно,

$$x_* \approx \frac{c_m}{c_{m+1}}. \quad (3)$$

Таким образом, если для фиксированного  $m$  выразить коэффициенты  $c_m$  и  $c_{m+1}$  ряда (1) через коэффициенты исходного многочлена  $f(x)$ , то после подстановки их в (3) можно получить приближенно минимальный по модулю корень алгебраического уравнения  $f(x) = 0$ .

Проиллюстрируем сказанное на примере алгебраического уравнения седьмой степени. Пусть

$$f(x) = x^7 + ax^6 + bx^5 + cx^4 + dx^3 + ex^2 + fx + g.$$

Разложим функцию  $\frac{1}{f(x)}$  в ряд Тейлора:

$$\frac{1}{f(x)} \approx \frac{1}{g} - \frac{f}{g^2} x + \left( \frac{f^2}{g^3} - \frac{e}{g^2} \right) x^2 + \left( \frac{(eg - f^2)f}{g^4} + \frac{fe}{g^3} - \frac{d}{g^2} \right) x^3 + \left( \frac{(dg^2 - 2efg + f^3)f}{g^5} + \right.$$

$$\begin{aligned}
& + \left. \left( \frac{(eg - f^2)e}{g^4} + \frac{fd}{g^3} - \frac{c}{g^2} \right) x^4 + \left( \frac{(dg^2 - 2efg + f^3)e}{g^5} + \frac{(eg - f^2)d}{g^4} + \frac{fc}{g^3} - \frac{b}{g^2} + \right. \right. \\
& \left. \left. \frac{(cg^3 - 2dfg^2 - e^2g^2 + 3ef^2g - f^4)f}{g^6} \right) x^5 + \left( \frac{fb}{g^3} - \frac{a}{g^2} + \frac{(cg^3 - 2dfg^2 - e^2g^2 + 3ef^2g - f^4)e}{g^6} + \right. \right. \\
& \left. \left. \frac{(dg^2 - 2efg + f^3)d}{g^5} + \frac{(bg^4 - 2cfg^3 - 2deg^3 + 3df^2g^2 + 3e^2fg^2 - 4ef^3g + f^5)f}{g^7} \right) x^6 + K. \quad (4)
\end{aligned}$$

Сравнивая выражения (4) и (1), с учетом (3), находим:

$$x_* \approx \frac{c_3}{c_4} = \frac{(dg^2 - 2efg + f^3)g}{cg^3 - 2dfg^2 - e^2g^2 + 3ef^2g - f^4}; \quad (5)$$

$$x_* \approx \frac{c_4}{c_5} = \frac{(cg^3 - 2dfg^2 - e^2g^2 + 3ef^2g - f^4)g}{bg^4 - 2cfg^3 - 2deg^3 + 3df^2g^2 + 3e^2fg^2 - 4ef^3g + f^5}; \quad (6)$$

$$\begin{aligned}
x_* \approx \frac{c_5}{c_6} = g & (bg^4 - 2cfg^3 - 2deg^3 + 3df^2g^2 + 3e^2fg^2 - 4ef^3g + f^5) / (ag^5 - 2bfg^4 - \\
& - 2ceg^4 + 3cf^2g^3 - d^2g^4 + 6defg^3 - 4df^3g^2 + e^3g^3 - 6e^2f^2g^2 + 5ef^4g - f^6); \quad (7)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
x_* \approx \frac{c_6}{c_7} = -g & (ag^5 - 2bfg^4 - 2ceg^4 + 3cf^2g^3 - d^2g^4 + 6defg^3 - 4df^3g^2 + e^3g^3 - \\
& - 6e^2f^2g^2 + 5ef^4g - f^6) / (2afg^5 + 2beg^5 - 3bf^2g^4 + 2cdg^5 - 6cefg^4 + 4cf^3g^3 - \\
& - 3d^2fg^4 - 3de^2g^4 + 12def^2g^3 - 5df^4g^2 + 4e^3fg^3 - 10e^2f^3g^2 + 6ef^5g - f^7 - g^6). \quad (8)
\end{aligned}$$

Таким образом, формулы (5) – (8) позволяют найти приближенное значение наименьшего по модулю корня алгебраического уравнения седьмой степени.

Рассмотрим применение данных формул на конкретном числовом примере. Пусть

$$\begin{aligned}
f(x) &= x^7 - 4x^6 + 313x^5 - 1508x^4 - 16862x^3 - 17832x^2 + 467544x + 906048 = \\
&= (x+2)(x-6)(x-8)(x-11\sqrt{3}i)(x+11\sqrt{3}i)(x+4+\sqrt{10}i)(x+4-\sqrt{10}i).
\end{aligned}$$

Тогда подстановка коэффициентов многочлена в формулы (5) – (8) дает соответственно приближенные значения корня

$$x_{*3/4} \approx -2,00235;$$

$$x_{*4/5} \approx -2,01545;$$

$$x_{*5/6} \approx -2,00123;$$

$$x_{*6/7} \approx -2,00112.$$

**Заключение.** В ходе выполнения работы предложен новый алгоритм для получения формул приближенного нахождения наименьшего по модулю корня алгебраического уравнения седьмой степени через его коэффициенты. Главным их достоинством являются быстрота вычислений и удобство использования на практике. Основным ограничением на применение формул (5) – (7) является наличие только одного минимального по модулю корня уравнения.

1. Alekseev, V.B. Abel's Theorem in Problems and Solutions / V.B. Alekseev. – New York: Kluwer Academic Publishers, 2004. – 285 p.
2. Шмойлов, В.И. Решение алгебраических уравнений при помощи г/ф-алгоритма / В.И. Шмойлов. – Таганрог: Изд-во ТТИ ЮФУ, 2011. – 330 с.
3. Трубников, Ю.В. Роль расходящихся степенных рядов в некоторых алгоритмах приближенного аналитического решения алгебраических уравнений / Ю.В. Трубников, М.М. Чернявский, А.М. Воронов // Веснік Віцебскага дзярж. ўніверсітэта. – 2017. – № 4(97). – С. 29–33.



# СВОЙСТВО СТАБИЛИЗИРУЕМОСТИ ВПОЛНЕ ИНТЕГРИРУЕМЫХ ЛИНЕЙНЫХ СТАЦИОНАРНЫХ СИСТЕМ ПФАФФА В СЛУЧАЕ СКАЛЯРНОГО УПРАВЛЕНИЯ

О.В. Храпцов  
Витебск, ВГУ имени П.М. Машерова

В работе материалом исследования являются вполне интегрируемые стационарные системы Пфаффа, которые являются линейными по входу – управлению и по выходу – состоянию системы. Такие системы исследовались на обладание ими различными свойствами управляемости. В настоящей работе исследуется вопрос об обладании указанными системами свойством стабилизации. Под стабилизацией понимается построение с помощью обратной связи такой вполне интегрируемой стационарной системы Пфаффа, тривиальное решение которой является асимптотически устойчивым в первом квадранте плоскости изменения двумерного аргумента.

Цель работы – получение условий стабилизируемости систем Пфаффа в случае скалярного управления.

**Материал и методы.** Материалом для исследования является дифференциальная модель процесса в виде линейной стационарной вполне интегрируемой системы Пфаффа в специальной форме. Методами исследования являются методы матричного анализа, методы теории систем дифференциальных уравнений Пфаффа, метод проблемы моментов.

**Результаты и их обсуждение.** В работе определено понятие свойства стабилизации. В случае скалярного управления получен критерий обладания такими системами свойством стабилизации. Критерий носит ранговый характер от некоторой матрицы, составленной с помощью известных матриц и векторов исходной системы. Исследование носит фундаментальный характер.

Рассматривается процесс, описываемый вполне интегрируемой линейной системой Пфаффа

$$\Theta: dx = (A_1x + b_1u(t))dt_1 + (A_2x + b_2u(t))dt_2, \quad t = (t_1, t_2) \in R^2, \quad x \in R^n. \quad (1)$$

Условия полной интегрируемости [1, с. 44] системы (1) в случае скалярного управления имеют вид [2]:

$$\text{условие перестановочности матриц системы } A_2A_1 = A_1A_2, \quad (2)$$

$$\text{условие согласованности рангов } \text{rank}T = 1, \quad T = [b_1, b_2, p]. \quad (3)$$

Замкнем систему (1) обратной связью  $u = cx$ ,  $c = (c_1, c_2, \dots, c_n)$ , где вещественный вектор-строка  $c$  подлежит определению. В результате получим систему

$$dx = H_1xdt_1 + H_2xdt_2, \quad \text{здесь } H_i = A_i + b_i c, \quad i = 1, 2. \quad (4)$$

**Определение 1.** Система (1) обладает свойством стабилизации, если существует такой вещественный вектор  $c$ , что система (4) является вполне интегрируемой и ее тривиальное решение асимптотически устойчиво в первом квадранте плоскости изменения аргумента  $t = (t_1, t_2)$ .

Пусть линейное преобразование  $L: y = Dx$  задается с помощью произвольной постоянной вещественной матрицы  $D$  ( $\det D \neq 0$ ).

*Лемма 1.* При линейном преобразовании  $L$  свойство (2) перестановочности матриц системы (1) сохраняется.

*Лемма 2.* При линейном преобразовании  $L$  свойство (3) согласованности рангов сохраняется.

Имеет место критерий

**Теорема 1.** Система (1) обладает свойством стабилизации тогда и только тогда, когда выполняется хотя бы одно из условий

$$\text{rank}K_i(b_i, A_i) = n, \quad K_i(b_i, A_i) \equiv [b_i, A_i, \dots, A_i^{n-1}b_i], \quad i = 1, 2.$$

При доказательстве используются леммы 1, 2, позволяющие привести систему к каноническому виду и

*Лемма 3. Обратная связь сохраняет свойство перестановочности матриц системы для любого вектора  $s$ .*

1. Гайшун, И.В. Вполне разрешимые многомерные дифференциальные уравнения / И.В. Гайшун. – Минск: Наука и техника, 1983. – 371 с.
2. Храмов, О.В. К управляемости стационарных систем Пфаффа / О.В. Храмов // Дифференц. уравнения, 1985. – Т.21. – N 11. – С. 1933–1939.

## КОНЕЧНЫЕ РАЗНОСТИ И ДРОБНАЯ ПРОИЗВОДНАЯ МАРШО-АДАМАРА

*С.А. Шлапаков  
Витебск, ВГУ имени П.М. Машерова*

В работе материалом исследования является операция дробного дифференцирования Адамара [3], которой на полуоси можно придать качественно иной вид. Эту форму представления называют дробной производной Маршо–Адамара [4]. Естественным видится дальнейшее обобщение этой конструкции. Настоящая работа и посвящена этому аспекту.

Цель данного исследования состоит в распространении дробной производной Маршо–Адамара порядка  $0 < \alpha < 1$  на случай  $\alpha > 1$  с использованием конечных разностей.

**Материал и методы.** Материалом исследования является дробная производная Маршо [1]. В работе используются методы дифференциального и интегрального исчисления, а также методы функционального анализа.

**Результаты и их обсуждение.** Дробная производная по Адамару [2], в случае  $0 < \alpha < 1$  имеет вид

$$(D_{0+}^{\alpha} f)(x) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} x \frac{d}{dx} \int_0^x \left( \ln \frac{x}{t} \right)^{-\alpha} f(t) \frac{dt}{t}, \quad x > 0, \quad (1)$$

где  $\Gamma(z) = \int_0^{\infty} x^{z-1} e^{-x} dx$  – гамма-функция.

Подчинив функцию  $f(x)$  определённым условиям [4], соотношение (1) можно преобразовать к виду

$$(D_{0+}^{\alpha} f)(x) = \frac{\alpha}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^{\infty} \frac{f(x) - f(xe^{-t})}{t^{\alpha+1}} dt.$$

Последняя формула позволяет рассматривать конструкцию вида

$$(D_{0+}^{\alpha} f)(x) = \frac{\alpha}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^{\infty} \frac{f(x) - f(xe^{-t})}{t^{\alpha+1}} dt = \frac{\alpha}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^x \frac{f(x) - f(t)}{(\ln \frac{x}{t})^{\alpha+1}} \frac{dt}{t}, \quad (2)$$

называемую дробной производной Маршо-Адамара [4] порядка  $\alpha$ ,  $0 < \alpha < 1$ . Распространить формулу (2) на значения параметра  $\alpha > 1$  можно традиционно, положив в ней  $\alpha = n + \{\alpha\}$ ,  $n = [\alpha]$ :

$$(D_{0+}^{\alpha} f)(x) = \delta^n (D_{0+}^{\{\alpha\}} f)(x) = \frac{\{\alpha\}}{\Gamma(1-\{\alpha\})} \int_0^{\infty} \frac{\delta^n f(x) - \delta^n f(xe^{-t})}{t^{1+\{\alpha\}}} dt, \quad (3)$$

где  $\delta = x \frac{d}{dx}$  – так называемое  $\delta$ -дифференцирование [3]. Но можно поступить иначе, перейдя в числителе в (2) от разности первого порядка к разности порядка  $l > 1$ . Этот способ в некоторых вопросах выглядит предпочтительнее, поскольку выявляет в явном виде

аналитическую зависимость  $\mathbf{D}_{0+}^\alpha f$  от параметра  $\alpha$ . Для этого введём величину

$$\left(\tilde{\Delta}_h^l f\right)(x) = \sum_{k=0}^l (-1)^k C_l^k f(xe^{-kh}), \quad (4)$$

называемую конечной разностью порядка  $l$  функции  $f(x)$  с растяжением  $h$  и с центром в точке  $x$ . Введём также в рассмотрение функцию параметра  $\alpha$

$$A_l(\alpha) = \sum_{k=0}^l (-1)^{k+1} C_l^k k^\alpha, \quad \alpha > 0,$$

возникающая при рассмотрении конечной разности функции  $f(x) = |\ln(x)|^\alpha$ , для которой  $\left(\tilde{\Delta}_1^l f\right)(1) = -A_l(\alpha)$ . Важное для нас свойство этой функции [1]:

$$A_l(\alpha) = 0, \quad \alpha = 1, 2, \dots, l-1. \quad (5)$$

Теорема. Пусть функция  $f(x)$  на полуоси  $R_+ = (0, +\infty)$  имеет непрерывные  $\delta$ -производные до порядка  $m$  включительно. Тогда для значений  $l \geq m$  имеет место соотношение

$$\left(\tilde{\Delta}_h^l f\right)(x) = \frac{h^m}{(m-1)!} \int_0^1 (1-u)^{m-1} \sum_{k=0}^l (-1)^{m-k} k^m C_l^k (\delta^m f)(xe^{-khu}) du. \quad (6)$$

*Доказательство.* В силу аналога формулы Тейлора (в ней обычные производные  $f^{(j)}(x)$  заменяются на  $\delta$ -производные  $(\delta^j f)(x)$  соответствующего порядка) с остаточным членом в интегральной форме можно записать:

$$f(xe^{-kh}) = \sum_{i=0}^{m-1} \frac{(-kh)^i}{i!} (\delta^i f)(x) + \frac{(-kh)^m}{(m-1)!} \int_0^1 (1-u)^{m-1} (\delta^m f)(xe^{-khu}) du.$$

Поэтому для разности (4) имеем:

$$\left(\tilde{\Delta}_h^l f\right)(x) = -\sum_{i=0}^{m-1} \frac{(-h)^i}{i!} \delta^i f(x) A_l(i) + \frac{h^m}{(m-1)!} \int_0^1 (1-u)^{m-1} \sum_{k=0}^l (-1)^{m-k} k^m C_l^k (\delta^m f)(xe^{-khu}) du,$$

что и даёт (6), если учесть (5).

Возвращаясь к (2), введём в рассмотрение конструкцию вида

$$\int_0^\infty \frac{\left(\tilde{\Delta}_t^l f\right)(x)}{t^{1+\alpha}} dt, \quad \alpha > 0.$$

Здесь интеграл сходится на достаточно “хороших” функциях  $f(x)$  при  $l > \alpha$  в предположении ограниченности разности, что следует из ограниченности  $(\delta^m f)(x)$ . При значениях  $0 < \alpha < 1$  будем иметь:

$$\begin{aligned} \int_\varepsilon^\infty \frac{\left(\tilde{\Delta}_t^l f\right)(x)}{t^{1+\alpha}} dt &= \frac{f(x)}{\alpha \varepsilon^\alpha} + \sum_{k=1}^l (-1)^k C_l^k k^\alpha \int_{k\varepsilon}^\infty \frac{f(xe^{-t})}{t^{1+\alpha}} dt = \\ &= \sum_{k=1}^l (-1)^k C_l^k k^\alpha \int_{k\varepsilon}^\infty \frac{f(xe^{-t}) - f(x)}{t^{1+\alpha}} dt. \end{aligned}$$

Перейдя к пределу, устремив к нулю  $\varepsilon$ , получаем

$$\int_0^\infty \frac{\left(\tilde{\Delta}_t^l f\right)(x)}{t^{1+\alpha}} dt = A_l(\alpha) \int_0^\infty \frac{f(x) - f(xe^{-t})}{t^{1+\alpha}} dt, \quad 0 < \alpha < 1,$$

на основании чего положим

$$\left(\mathbf{D}_{0+}^\alpha f\right)(x) = -\frac{1}{\Gamma(-\alpha) A_l(\alpha)} \int_0^\infty \frac{\left(\tilde{\Delta}_t^l f\right)(x)}{t^{\alpha+1}} dt, \quad 0 < \alpha < l. \quad (7)$$

Будем называть (7) дробной производной Маршо–Адамара.

**Заключение.** Важность исследования свойств операторов дробного интегро-дифференцирования обусловлена их применением при отыскании ответов на разнообразные вопросы физики и механики в теории колебаний, теории теплопроводности, теории упругости. В работе получено аналитическое выражение дробной производной Маршо-Адамара через конечную разность порядка выше первого.

1. Самко, С.Г. Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения / С.Г. Самко, А.А. Килбас, О.И. Маричев. – Мн.: Наука и техника, 1987. – 688 с.
2. Шлапаков, С.А. О дробном интегродифференцировании Адамара в весовых пространствах суммируемых функций / С.А. Шлапаков // Веснік ВДУ.–2009. Т. 53, №3.– С. 132-135.
3. Шлапаков, С.А. Операторы дробного интегродифференцирования по Адамару / С.А. Шлапаков // Наука – образованию, производству, экономике: материалы XVI (63) Региональной научно-практической конференции преподавателей, научных сотрудников и аспирантов, 16–17 марта 2011 г. – Витебск, 2011.– Т. 1. С. 71-73.
4. Шлапаков, С.А. Производные Маршо-Адамара дробного порядка / С.А. Шлапаков // Наука – образованию, производству, экономике: материалы XX (67) Региональной научно-практической конференции преподавателей, научных сотрудников и аспирантов, 12–13 марта 2015 г. – Витебск, 2015.– Т. 1. С. 27-28.

### ИССЛЕДОВАНИЕ СВОЙСТВ КРИСТАЛЛОВ TGS, ЛЕГИРОВАННЫХ РАЦЕМИЧЕСКОЙ ПРИМЕСЬЮ $D,L-\alpha$ – И $L-\alpha$ – АЛАНИНА

*В.Н. Шум<sup>1,2</sup>, С.Е. Мозжаров<sup>2</sup>, И.Ф. Кашевич<sup>1</sup>*  
*<sup>1</sup>Витебск, ВГУ имени П.М. Машерова*  
*<sup>2</sup>Витебск, ИТА НАН Беларуси*

Одно из основных направлений получения и исследования новых функциональных сегнетоэлектрических материалов связано с созданием в них статических и динамических неоднородностей, которые формируются в результате технологических процессов и путем воздействия различных физических полей. Это определяется тем, что характер и природа неоднородностей или внешних воздействий на сегнетоэлектрики могут давать широкие возможности для изменения физических характеристик уже известных материалов, и способствовать получению новых материалов с уникальным набором свойств.

Устойчивость монодоменного состояния кристаллов TGS, обеспечивающая стабильность его параметров, при использовании его в качестве мишеней пироэлектрических видиконов и чувствительных элементов приемников инфракрасного излучения достигается введением активных примесей типа внедрения (ионы металлов) и замещения (аланин и др.). Наиболее ярким примером создания униполярного состояния и стабилизации спонтанной поляризации является допирование TGS во время выращивания полярными примесями D- или L-  $\alpha$ -аланина.

Молекулы аланина ( $\text{NH}_2\text{CH}(\text{CH}_3)\text{COOH}$ ) изоморфны молекулам глицина ( $\text{NH}_2\text{CH}_2\text{COOH}$ ) и могут замещать их в кристалле. Поскольку молекулы  $\alpha$ -аланина несколько больше молекул глицина, замещение ими исходного глицина приводит к созданию дополнительных локальных полей механических напряжений и, вследствие пьезоэффекта, дополнительных внутренних полей смещения  $\Delta E_{cm}$  в местах замещения. В результате появляется определенное число необратимых диполей, и формируются большие монодоменные участки. Каждая примесь в отдельности стабилизирует поляризацию в одном направлении. Это связано со спецификой вхождения  $D,\alpha$ - и  $L,\alpha$ -аланина в кристаллическую решетку ( $D,\alpha$ -,  $L,\alpha$ - аланин – оптические изомеры  $\alpha$ -аланина). Представляет интерес изучение свойств TGS кристаллов, выращенных из растворов, содержащих рацемическую примесь  $D,\alpha$ - и  $L,\alpha$ -аланина (DLATGS).

Целью работы явилось исследование закономерностей влияния неоднородного распределения рацемической примеси  $D,L-\alpha$ -аланина на формирование внутренних полей и свойства кристаллов DLATGS.

**Материал и методы.** Объектом исследования служили кристаллы DLATGS, выращенные из растворов с различной концентрацией примеси (3, 7 и 25 вес.% в растворе), а также номинально чистые кристаллы TGS, полученные в аналогичных режимах роста. Кристаллы DLATGS выращивали в сегнетоэлектрической фазе при постоянной температуре скоростным методом.

Были исследованы диэлектрические и переполяризационные свойства полученных кристаллов. Для проведения исследований кристаллы DLATGS и TGS раскалывались по

плоскостям спайности на отдельные образцы (толщиной  $\sim 1$  мм), на параллельные большие плоскости (площадью  $\sim 2 - 3$  см<sup>2</sup>) которых методом напыления наносились алюминиевые электроды.

Емкость  $C$ , тангенс угла диэлектрических потерь  $\text{tg}\delta$  измеряли в слабых электрических полях частотой 1 кГц с помощью цифрового измерителя L,C,R E7-8. Измерения выполнялись в диапазоне температур от 20°C до 60 °C в режиме нагревания и охлаждения со скоростью 0,2 °C/мин. Точность определения температуры была не хуже  $\pm 0,1$  °C. Значения спонтанной поляризации  $P_s$ , коэрцитивных полей  $E_c$  и коэффициентов динамической униполярности  $K$  определяли по петлям гистерезиса, которые наблюдали с помощью модифицированной схемы Сойлера- Тауэра с включением в измерительную схему фазовращающей цепочки для компенсации сквозной проводимости.

**Результаты и их обсуждение.** Пластика полярного скота из высоколегированного кристалла DLATGS (25 вес.%), доменная структура которого представляла две монокристаллические области с границей, проходящей через затравку, была разделена на два образца по этой границе – справа и слева от затравки (образцы 1 и 2 соответственно).

На рисунках 1 и 2 приведены температурные зависимости диэлектрической проницаемости  $\epsilon$  и тангенса диэлектрических потерь  $\text{tg}\delta$ , а также петли диэлектрического гистерезиса для указанных образцов.

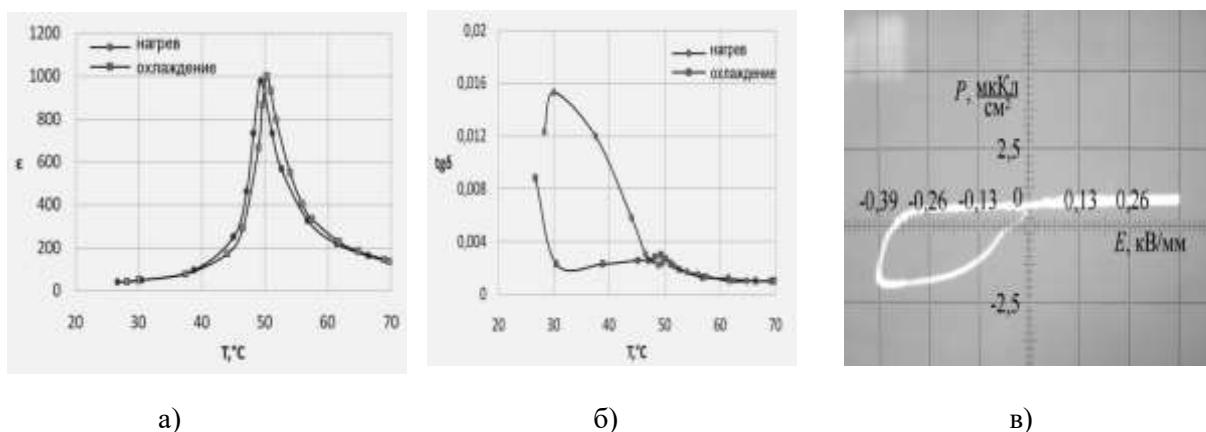


Рисунок 1 – Температурная зависимость  $\epsilon$  (а) и  $\text{tg}\delta$  (б), диэлектрическая петля гистерезиса (в) для высоколегированного образца 1 DLATGS.

Полученные данные показали, что значения  $\epsilon_{\text{max}}$  и  $\text{tg}\delta$  в точке Кюри высоколегированных кристаллов DLATGS уменьшаются более чем на два порядка по сравнению с аналогичными характеристиками номинально чистых кристаллов TGS. Температура Кюри  $T_c$  смещается приблизительно на 1°C в сторону высоких температур.

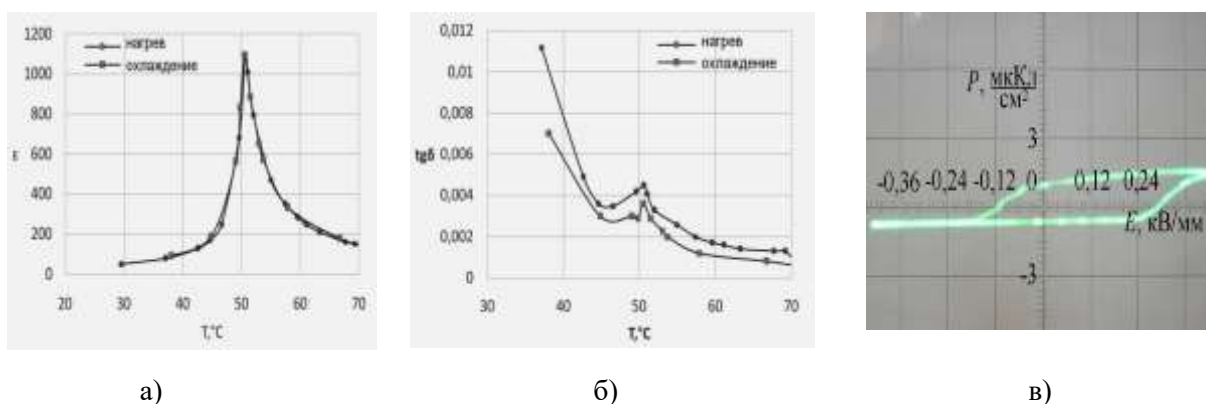


Рисунок 2 – Температурная зависимость  $\epsilon$ (а) и  $\text{tg}\delta$  (б), диэлектрическая петля гистерезиса (в) для высоколегированного образца 2 DLATGS.

Отличительной особенностью исследованных образцов 1 и 2 было отсутствие температурного гистерезиса в режимах нагревания и охлаждения. Это свидетельствует о стабильной доменной структуре, поскольку в TGS кристаллах величина диэлектрической проницаемости, измеряемая в переменном электрическом поле, являющаяся суммой индуцированной и доменной компонент, определяется преимущественно второй компонентой. В данном случае это монодоменная структура, и, как показали измерения петли гистерезиса, с высоким внутренним смещающим полем ( $E_{см} \sim 300$  В/мм) и с коэффициентом униполярности выше 100% (см. рис. 1в и 2в). Петли диэлектрического гистерезиса образцов 1 и 2 были ассиметричны и имели различные направления смещения по оси E и P, что подтверждает факт формирования двух монодоменных областей с противоположным направлением спонтанной поляризации в высоколегированных кристаллах DLATGS.

**Заключение.** Проведенное исследование диэлектрических и переполяризационных свойств кристаллов DLATGS, выращенных из растворов с различной концентрацией примеси (3, 7 и 25 вес.% в растворе), показало, что значения коэрцитивных полей  $E_c$ , внутренних полей смещения  $E_{см}$  и коэффициентов динамической униполярности  $k$  увеличиваются при увеличении концентрации примеси, а величина реверсируемой спонтанной поляризации  $P_s$  уменьшается. Кристаллы с такими характеристиками могут быть перспективны для практического применения в качестве пироэлектрических элементов и чувствительных тензодатчиков.

## О ЦЕЛЫХ ПОЛОЖИТЕЛЬНЫХ РЕШЕНИЯХ МАТРИЧНЫХ УРАВНЕНИЙ ЧЕТВЕРТОЙ СТЕПЕНИ ДЛЯ МАТРИЦ ВТОРОГО ПОРЯДКА

*К.Л. Якуто  
Витебск, ВГУ имени П.М. Машерова*

Важное значение для решения большого круга задач, связанных с моделированием экономических, социальных процессов, имеет задача о целом положительном решении нелинейных матричных уравнений полиномиального вида для матриц различных порядков [1, с. 189].

Цель настоящего исследования – доказать эффективность использования аналитических методов для решения задачи по нахождению целых положительных решений нелинейных матричных уравнений четвертой степени для матриц второго порядка.

**Материал и методы.** Методика проводимого исследования состояла в следующем: решаемое уравнение записывалось в виде системы, состоящей для матриц второго порядка из четырёх нелинейных уравнений, которая затем решалась аналитическими методами. В процессе проведения исследования использовался пакет символьной математики *Maple* 18.

**Результаты и их обсуждение.** Рассмотрим матричное уравнение

$$X^4 + AX = B \tag{1}$$

где  $X = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ ,  $A = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$ ,  $B = \begin{pmatrix} K & L \\ M & N \end{pmatrix}$ .

**Лемма 1.** Если существует целый положительный корень рассматриваемого вида, то для его нахождения необходимо оценить возможные значения переменных  $a$  и  $d$ , затем для каждого возможного значения пары этих переменных найти значение переменной  $b$ , разрешив квадратное уравнение  $pb^2 + qb + r = 0$ , где

$$p = -5a^6 - 14a^5d - 19a^4d^2 - 20a^3d^3 - 15a^2d^4 - 6ad^5 - d^6 - 4a^3\alpha - 8a^2d\alpha - 4ad^2\alpha + 4a^2k + 8adk + 4d^2k + \alpha^2, q = -2a^4\beta - 8a^3d\beta - 12a^2d^2\beta - 8ad^3\beta - 2d^4\beta + 4La^3 + 8La^2d + 4ad^2 - 2a\alpha\beta - 2L\alpha, r = -2ad\beta^2 - d^2\beta^2 + 2L\alpha\beta + L^2, k = K - a^4 - \alpha a, n = N - d^4 - \delta d; переменную  $c$$$

можно найти, используя формулу связи между переменными  $b$  и  $c$ :

$$c = \frac{L - a^3b - a^2bd - abd^2 - bd^3 - \alpha b - \beta d}{2b^2(a + d)}.$$

Доказательство. В этом случае система уравнений, соответствующая уравнению (1) будет иметь следующий вид:

$$\begin{cases} a^4 + 3a^2bc + 2abcd + b^2c^2 + bcd^2 + \alpha a + \beta c = K, \\ a^3b + 2ab^2c + a^2bd + abd^2 + 2b^2cd + bd^3 + \alpha b + \beta d = L, \\ a^3c + 2abc^2 + a^2cd + acd^2 + 2bc^2d + cd^3 + \gamma a + \delta c = M, \\ a^2bc + 2abcd + b^2c^2 + 3bcd^2 + d^4 + \gamma b + \delta d = N. \end{cases} \quad (2)$$

Оценка для переменной  $a$  имеет вид:  $1 \leq a \leq \sqrt[4]{K - 7 - \alpha - \beta}$ . Оценка для переменной  $d$  имеет вид:  $1 \leq d \leq \sqrt[4]{N - 7 - \gamma - \delta}$ .

Выразив из второго уравнения системы (2) переменную  $c$ :

$$c = \frac{L - a^3b - a^2bd - abd^2 - bd^3 - \alpha b - \beta d}{2b^2(a + d)} \quad (3)$$

Подставив выражение (3) в первое уравнение системы (2), получим уравнение относительно переменной  $b$ :

$$pb^2 + qb + r = 0 \quad (4)$$

где

$$\begin{aligned} p &= -5a^6 - 14a^5d - 19a^4d^2 - 20a^3d^3 - 15a^2d^4 - 6ad^5 - d^6 - 4a^3\alpha - 8a^2d\alpha - \\ &- 4ad^2\alpha + 4a^2k + 8adk + 4d^2k + \alpha^2, \quad q = -2a^4\beta - 8a^3d\beta - 12a^2d^2\beta - 8ad^3\beta - \\ &- 2d^4\beta + 4La^3 + 8La^2d + 4ad^2 - 2a\alpha\beta - 2L\alpha, \quad r = -2ad\beta^2 - d^2\beta^2 + 2L\alpha\beta + L^2, \\ k &= K - a^4 - \alpha a, \quad n = N - d^4 - \delta d. \end{aligned}$$

Таким образом, для решения поставленной задачи необходимо для каждой возможной пары значений переменных  $a$  и  $d$  решать уравнение второго порядка относительно переменной  $b$  и затем находить переменную  $c$ .

Рассмотрим нелинейное матричное уравнение

$$X^4 + AX^2 = B \quad (5)$$

где  $X = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ ,  $A = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$ ,  $B = \begin{pmatrix} K & L \\ M & N \end{pmatrix}$ .

**Лемма 2.** Если существует целый положительный корень рассматриваемого уравнения, то для его нахождения необходимо оценить возможные значения переменных  $a$  и  $d$ , затем для каждого возможного значения пары этих переменных найти значение переменной  $b$ , разрешив кубическое уравнение  $pb^3 + qb^2 + rb + s = 0$ , где

$$\begin{aligned} p &= -5a^6 - 14a^5d - 19a^4d^2 - 20a^3d^3 - 15a^2d^4 - 6ad^5 - d^6 - 6a^4\alpha - 16a^3d\alpha - \\ &- 16a^2d^2\alpha - 8ad^3\alpha - 2d^4\alpha - a^2\alpha^2 - 2ada\alpha^2 - d^2\alpha^2 - 4a^2k - 8adk - 4d^2k, \\ q &= -5a^5\beta - 11a^4d\beta - 18a^3d^2\beta - 22a^2d^3\beta - 13ad^4\beta - 3d^5\beta - 6a^3\alpha\beta - 12a^2d\alpha\beta - \\ &- 10ad^2\alpha\beta - 4d^3\alpha\beta + 4La^3 + 8La^2d + 4Lad^2 - a\alpha^2\beta - d\alpha^2\beta - 4ak\beta - 4dk\beta, \\ r &= -a^4\beta^2 - 2a^3d\beta^2 - 7a^2d^2\beta^2 - 8ad^3\beta^2 - 3d^4\beta^2 - a^2\alpha\beta^2 - 2ad\alpha\beta^2 - 2d^2\alpha\beta^2 + \end{aligned}$$

$$+5La^2\beta + 6Lad\beta + Ld^2\beta + L\alpha\beta - k\beta^2 + L^2, s = -ad^2\beta^3 - d^3\beta^3 + La\beta^2 + Ld\beta^2,$$

$$k = K - a^4 - \alpha a^2, n = N - d^4 - \delta d^2,$$

переменную  $c$  можно найти, используя формулу связи между переменными  $b$  и  $c$ :

$$c = \frac{L - a^3b - a^2bd - abd^2 - bd^3 - \alpha ab - \alpha bd - \beta d^2}{2b^2(a + d) + \beta b}.$$

Доказательство. В этом случае система уравнений, соответствующая уравнению (5) будет иметь следующий вид:

$$\begin{cases} a^4 + 3a^2bc + 2abcd + b^2c^2 + bcd^2 + \alpha a^2 + \alpha bc + \beta ac + \beta cd = K, \\ a^3b + 2ab^2c + a^2bd + abd^2 + 2b^2cd + bd^3 + \alpha ab + \alpha bd + \beta d^2 + \beta bc = L, \\ a^3c + 2abc^2 + a^2cd + acd^2 + 2bc^2d + cd^3 + \gamma a^2 + \gamma bc + \delta ac + \delta cd = M, \\ a^2bc + 2abcd + b^2c^2 + 3bcd^2 + d^4 + \gamma ab + \gamma bd + \delta bc + \delta d^2 = N. \end{cases} \quad (6)$$

Оценка для переменной  $a$  имеет вид:  $1 \leq a \leq \sqrt[4]{K - 7 - 2\alpha - 2\beta}$ . Оценка для переменной  $d$  имеет вид:  $1 \leq d \leq \sqrt[4]{N - 7 - 2\beta - 2\delta}$ .

Выразив из второго уравнения системы (6) переменную  $c$ :

$$c = \frac{L - a^3b - a^2bd - abd^2 - bd^3 - \alpha ab - \alpha bd - \beta d^2}{2b^2(a + d) + \beta b} \quad (7)$$

Подставив выражение (7) в первое уравнение системы (6), получим уравнение относительно переменной  $b$ :

$$pb^3 + qb^2 + rb + s = 0 \quad (8)$$

где

$$p = -5a^6 - 14a^5d - 19a^4d^2 - 20a^3d^3 - 15a^2d^4 - 6ad^5 - d^6 - 6a^4\alpha - 16a^3d\alpha - 16a^2d^2\alpha - 8ad^3\alpha - 2d^4\alpha - a^2\alpha^2 - 2ad\alpha^2 - d^2\alpha^2 - 4a^2k - 8adk - 4d^2k,$$

$$q = -5a^5\beta - 11a^4d\beta - 18a^3d^2\beta - 22a^2d^3\beta - 13ad^4\beta - 3d^5\beta - 6a^3\alpha\beta - 12a^2d\alpha\beta - 10ad^2\alpha\beta - 4d^3\alpha\beta + 4La^3 + 8La^2d + 4Lad^2 - a\alpha^2\beta - d\alpha^2\beta - 4ak\beta - 4dk\beta,$$

$$r = -a^4\beta^2 - 2a^3d\beta^2 - 7a^2d^2\beta^2 - 8ad^3\beta^2 - 3d^4\beta^2 - a^2\alpha\beta^2 - 2ad\alpha\beta^2 - 2d^2\alpha\beta^2 + 5La^2\beta + 6Lad\beta + Ld^2\beta + L\alpha\beta - k\beta^2 + L^2, s = -ad^2\beta^3 - d^3\beta^3 + La\beta^2 + Ld\beta^2,$$

$$k = K - a^4 - \alpha a^2, n = N - d^4 - \delta d^2.$$

Таким образом, для решения поставленной задачи необходимо для каждой возможной пары значений переменных  $a$  и  $d$  решать уравнение третьего порядка относительно переменной  $b$  и затем находить переменную  $c$ .

**Заключение.** В результате проведённого исследования было показано, что для решения задачи по нахождению целых положительных решений матричных уравнений полиномиального вида для матриц второго порядка можно использовать аналитические методы.

1. Буснюк, Н.Н. Математическое моделирование / Н.Н. Буснюк, А.А. Черняк. – Минск: Беларусь, 2014. – 214 с.



# ЭКОЛОГО-БИОЛОГИЧЕСКОЕ И ГЕОГРАФИЧЕСКОЕ ОБОСНОВАНИЕ РАЦИОНАЛЬНОГО ИСПОЛЬЗОВАНИЯ РЕСУРСНОГО ПОТЕНЦИАЛА И ОХРАНЫ ОКРУЖАЮЩЕЙ СРЕДЫ БЕЛОРУССКОГО ПООЗЕРЬЯ

---

## СОДЕРЖАНИЕ АСКОРБИНОВОЙ КИСЛОТЫ В ВОДНЫХ ЭКСТРАКТАХ РАНЕЦВЕТУЩИХ РАСТЕНИЙ

*О.В. Авласевич, Е.А. Леонович, О.М. Балаева-Тихомирова  
Витебск, ВГУ имени П.М. Машерова*

Растениями, содержащими в своем составе практически все известные антиоксиданты являются различные виды луков [1], а также первоцвет весенний [2]. В их листьях содержатся витамин С, соединения фенольной природы, флавоноиды, каротиноиды, пектиновые и минеральные вещества, эфирные масла. Данные растения широко используются за рубежом в качестве антиоксидантных, противогрибковых, антибактериальных, кардиотонических, гиполипемических средств в виде спиртовых экстрактов и капсул с порошком измельченного сырья. Однако в Республики Беларусь и странах СНГ данные растения являются малоизученными и не находят широкого. Поскольку биологически активные вещества изученных растений нестойки, быстро разрушаются при хранении и высушивании растительного сырья, то актуальным является создание экстрактов и изучение их биологической активности.

Целью работы – определить содержание аскорбиновой кислоты в раннецветущих растениях в зависимости от типа популяции, вида органа и места произрастания.

**Материал и методы.** Материалом исследования являются водные экстракты (1:5) и (1:10) раннецветущих растений (медвежьего лука (*Ellium ursnnum*), первоцвета весеннего (*Prnmtula vūris*), шнитт-лука (*Bllium schoenoprbsum*). Образцы растений отбирались из популяций, произрастающих в условиях ботанического сада ВГУ имени П.М. Машерова (интродукционная популяция, полученная из природных популяций растений, произрастающих вблизи д. Шавеки Шумиленского района), лесничества д. Крацевичи Борисовского района и лесничества г. Витебск.

Содержание восстановленной аскорбиновой кислоты в листьях растений и полученных из них экстрактов определяли спектрофотометрическим методом, основанным на взаимодействии окисленной аскорбиновой кислоты с 2%-ной  $\text{HPO}_3$  и 0,21М  $\text{Na}_3\text{PO}_4$  [3].

Для получения экстрактов растений применяли классический метод экстрагирования – настаивание. Был подобраны условия проведения экстрагирования (вид экстрагента – вода, кратность экстрагирования – 3, соотношение сырье: экстрагент – 1: 5 и 1: 10, степень измельчения сырья – 1,0 мм, время экстракции – 12 часов). При этом основным критерием выбора являлось содержание эндогенных антиоксидантов в экстракте по сравнению с их содержанием в растительном сырье. Полученные при трехкратном извлечении растворы объединяли, помещали в прохладное место (холодильная камера при температуре 8–10<sup>0</sup>С) на 24 часа. После оседания балластных веществ вытяжку фильтровали через бумажный фильтр). В результате получили прозрачные экстракты темно-зеленого цвета. Далее изучали состав полученных экстрактов.

Математическую обработку полученных результатов проводили методами параметрической и непараметрической статистики с использованием пакета статистических программ Microsoft Excel 2003, STATISTICA 6.0.

**Результаты и их обсуждение.** Из таблицы 1 следует, что наибольшее содержание аскорбиновой кислоты наблюдалось в листьях медвежьего лука и шнитт лука, у первоцвета весеннего наибольшее содержание данного показателя наблюдалось в цветках. В водных экстрактах (1:5) наибольшее содержание аскорбиновой кислоты наблюдалось в генеративных органах – цветках первоцвета весеннего. В водных экстрактах (1:10) наибольшее содержание данного показателя наблюдалось также в цветках первоцвета весеннего.