

Министерство образования Республики Беларусь
Учреждение образования «Витебский государственный
университет имени П.М. Машерова»

НАУКА – ОБРАЗОВАНИЮ, ПРОИЗВОДСТВУ, ЭКОНОМИКЕ

*Материалы XXII(69) Региональной
научно-практической конференции преподавателей,
научных сотрудников и аспирантов*

9–10 февраля 2017 г.

В 2 томах

Том 1

*Витебск
ВГУ имени П.М. Машерова
2017*

УДК 378.4(476.5)(062)
ББК 74.483(4Бен-4Вит)бя431
НЗ4

Печатается по решению научно-методического совета учреждения образования «Витебский государственный университет имени П.М. Машерова». Протокол № 2 от 28.12.2016 г.

Редакционная коллегия:

доктор биол. наук, профессор **И.М. Прищепа** (гл. ред);
канд. биол. наук, доцент **В.Я. Кузьменко**; доктор ист. наук, профессор **В.А. Космач**;
канд. физ.-мат. наук, доцент **Е.Н. Залесская**; канд. пед. наук, доцент **И.А. Шарапова**;
канд. ист. наук, доцент **С.А. Моторов**; канд. пед. наук, доцент **В.Г. Шпак**;
канд. филос. наук, доцент **А.А. Бочков**; канд. пед. наук, доцент **Ю.П. Беженарь**;
доктор пед. наук, доцент **С.В. Николаенко**

Рецензенты:

доктор физ.-мат. наук, профессор *Н.Т. Воробьев*; доктор филос. наук, профессор *М.А. Слемнев*;
доктор биол. наук, профессор *А.А. Чиркин*; доктор пед. наук, профессор *Е.Я. Аршанский*;
доктор филол. наук, профессор *А.М. Мезенко*; доктор филол. наук, профессор *В.Ю. Боровко*;
доктор пед. наук, профессор *А.П. Орлова*; доктор физ.-мат. наук, профессор *Ю.В. Трубников*;
доктор геол.-минер. наук, проф. *А.Н. Галкин*

НЗ4 **Наука – образованию, производству, экономике** : материалы XXII(69) Региональной научно-практической конференции преподавателей, научных сотрудников и аспирантов, Витебск, 9–10 февраля 2017 г. : в 2 т. / Витеб. гос. ун-т ; редкол.: И.М. Прищепа (гл. ред.) [и др.]. – Витебск : ВГУ имени П.М. Машерова, 2017. – Т. 1. – 437 с.
ISBN 978-985-517-576-7.
ISBN 978-985-517-577-4 (т. 1).

В сборнике статей XXII(69) Региональной научно-практической конференции преподавателей, научных сотрудников и аспирантов «Наука – образованию, производству, экономике» опубликованы доклады профессорско-преподавательского состава ВГУ имени П.М. Машерова, сотрудников учреждений и организаций Республики Беларусь. В предлагаемом издании рассматриваются проблемы развития научных и инновационных проектов университета, освещаются результаты выполнения государственных программ научных исследований, значительное внимание уделяется вопросам международного научно-технического сотрудничества и методики преподавания дисциплин в высшей и средней школе.

Материалы конференции могут быть использованы специалистами государственных учреждений, научными работниками, преподавателями, аспирантами и студентами высших учебных заведений, учителями средних школ и гимназий.

УДК 378.4(476.5)(062)
ББК 74.483(4Бен-4Вит)бя431

ISBN 978-985-517-576-7
ISBN 978-985-517-577-4 (т. 1)

© ВГУ имени П.М. Машерова, 2017

ПОДГОТОВКА НАУЧНЫХ РАБОТНИКОВ ВЫСШЕЙ КВАЛИФИКАЦИИ В ВГУ ИМЕНИ П.М. МАШЕРОВА: ИТОГИ И ПЕРСПЕКТИВЫ РАЗВИТИЯ

*И.М. Прищепя, И.А. Красовская, А.П. Косов
Витебск, ВГУ имени П.М. Машерова*

23 декабря 2016 года Президент Республики Беларусь Александр Лукашенко подписал Указ «Об объявлении 2017 года Годом науки». Основной целью данного решения является повышение роли науки в выполнении задач социально-экономического развития республики, создание благоприятных условий для сохранения и развития научного потенциала, формирование международного имиджа Беларуси как страны с высоким уровнем интеллектуального и человеческого капитала. По сведениям пресслужбы Президента, реализация мероприятий, посвященных Году науки, будет способствовать развитию отечественных научных школ, вузовской и отраслевой науки для обеспечения устойчивого экономического роста страны, приумножению научного потенциала Беларуси, поддержке творчески мыслящих молодых ученых и специалистов.

Беларусь всегда славилась своими учеными, и наш университет сегодня прилагает немало усилий, чтобы отечественная наука продолжала развиваться. В Витебском государственном университете имени П.М. Машерова работает двенадцать научных школ, которые возглавляют опытные профессора, действует широкая система поддержки ученых, талантливые молодые исследователи университета участвуют в республиканских и международных научных конкурсах, проектах, программах. Работники наших ученых востребованы в учреждениях образования, здравоохранения и народном хозяйстве.

Одно из важнейших направлений деятельности учреждений высшего образования в современных условиях сформулировано в Государственной программе инновационного развития Республики Беларусь на 2016–2020 годы. Оно ориентировано на непрерывную подготовку кадров с целью повышения престижа науки и привлечения молодежи к научной и инновационной деятельности.

Подготовка научных работников высшей квалификации в ВГУ имени П.М. Машерова осуществляется через аспирантуру университета и путем направления сотрудников в другие учреждения образования и организации, реализующие образовательные программы послевузовского образования. Информационное обеспечение системы планирования и подготовки научных работников высшей квалификации происходит посредством автоматизированной информационно-аналитической системы мониторинга.

Два раза в год проводятся текущие аттестации аспирантов и соискателей, на которых аттестационными комиссиями, утверждаемыми приказами ректора, рассматриваются результаты научно-исследовательской работы обучающихся дневной и заочной форм обучения, а также соискателей. В случае необходимости соискатели на протяжении первых двух лет обучения сдают кандидатские экзамены и зачеты по общеобразовательным дисциплинам. На последнем году обучения аспиранты и соискатели сдают кандидатский экзамен по специальности и в обязательном порядке проходят итоговую аттестацию, на которой государственной аттестационной комиссией принимается решение о выдаче выпускникам дипломов исследователя. За два месяца до окончания аспирантуры выпускники дневной бюджетной формы обучения, подготовка которых осуществлялась по заявкам организаций-заказчиков, проходят обязательное распределение.

В 2016 учебном году (в апреле и октябре) работало девять аттестационных комиссий – по физико-математическим, биологическим, историческим, филологическим,

философским, психологическим, педагогическим наукам и искусствоведению. В октябре 2016 года в целях итоговой аттестации выпускников приказом Министерства образования было создано шесть государственных аттестационных комиссий по физико-математическим, биологическим, историческим, филологическим, психологическим и педагогическим наукам. Председателями комиссий были доктора наук, профессора из БНТУ, ВГАВМ, БГУИР, НАН Беларуси, БГУ и ВГМУ.

В настоящее время в аспирантуре университета для подготовки открыто 19 специальностей на следующих факультетах: математики и информационных технологий – пять, в том числе одна из числа приоритетных специальностей, необходимых для развития высокотехнологичных производств, относящихся к V и VI технологическим укладам экономики; биологическом – четыре, в том числе одна – приоритетная; филологическом – шесть; историческом – две; художественно-графическом – три; факультете социальной педагогики и психологии – одна.

В 2014 году была открыта специальность 17.00.09 – теория и история искусства, по которой в настоящее время обучается 11 аспирантов и соискателей. В конце 2016 года коллегией ВАК было принято положительное решение по открытию еще двух специальностей аспирантуры 10.02.19 – теория языка и 10.02.20 – сравнительно-историческое, типологическое и сопоставительное языкознание (филологические науки).

Анализ деятельности аспирантуры за последние три года показал следующее.

В 2014 году в аспирантуре университета обучалось 66 человек, в 2015 – 79, по состоянию на 1 ноября 2016 г. численность обучающихся возросла до 83 человек. Показатели приема при этом были следующие: в 2014 году было принято 17 человек (из них 11 – на дневную форму, 4 – на заочную, 2 – соискательство); в 2015 году прием составлял 30 человек (из них 19 – на дневную форму, 7 – на заочную, 4 – соискательство); в 2016 году было принято 20 человек (из них 11 – на дневную форму, 8 – на заочную, 1 – соискательство).

Выпуск из аспирантуры в 2014 г. составил 15 человек, из них 11 – дневной формы обучения и 4 – заочной. В 2015 г. выпуск составил 13 человек: 11 – дневной формы обучения и 2 – заочной. В 2016 г. – 10 человек: 9 аспирантов дневной формы обучения, и 1 – заочной.

В настоящее время 10 человек, в том числе один гражданин Ливии, обучаются на внебюджетной основе (что составляет 12% от общего количества обучающихся).

В 2014 г. 9 выпускников из 15 (60%) окончили аспирантуру с предварительной экспертизой диссертации; в 2015 г. – 6 выпускников из 13 (46%) прошли предварительную экспертизу; в 2016 г. – 5 выпускников из 10 (50%).

Эффективность подготовки научных работников высшей квалификации в университете выражается в количестве защит выпускниками аспирантуры и сотрудниками университета кандидатских и докторских диссертаций.

Так, в 2014 г. состоялась 1 защита докторской и 8 – кандидатских диссертаций. В 2015 г. прошла 1 нострификация докторской и 13 защит кандидатских диссертаций. В 2016 г. состоялись 3 защиты докторских диссертаций (2 в Беларуси и 1 в России) и 7 защит кандидатских диссертаций. В настоящее время одна докторская диссертация получила подтверждение ВАК Российской Федерации и шесть диссертаций – подтверждение ВАК Республики Беларусь.

В целом, в течение трех лет 29% кандидатских диссертаций от общего числа защит за 3 года защищено по филологическим наукам, 18% – по педагогическим наукам, 14% – по физико-математическим наукам, 11% – по биологическим наукам, 8% – по историческим и психологическим наукам, 4% – по химическим, юридическим наукам и искусствоведению.

В рассматриваемый период проходили защиты наших сотрудников и сотрудников сторонних организаций и в совете по защите диссертаций К 02.20.01 при ВГУ имени П.М. Машерова. В 2015 году состоялось 4 защиты по специальности 13.00.01 – общая педагогика, история педагогики и образования (педагогические науки) и одна переекспертация. Президиумом ВАК Беларуси были утверждены 2 диссертации. В 2016 году в совете состоялись 2 защиты по этой специальности.

Как было отмечено ранее, подготовка научных кадров высшей квалификации ведется не только через аспирантуру университета, но и в других учреждениях образования и организациях, реализующих образовательные программы I и II ступеней: Белорусском государственном университете, Белорусском государственном университете имени М. Танка, Белорусском государственном университете физической культуры, Белорусском государственном экономическом университете, Белорусском государственном университете культуры и искусств, Минском государственном лингвистическом университете, Полесском государственном университете, научных организациях Национальной академии наук Беларуси и др.

В 2014 году в аспирантуре и докторантуре других учреждений образования и организаций проходило обучение 22 и 5 человек соответственно; в 2015 году – 20 и 5 человек. В настоящее время в других учреждениях, обеспечивающих получение послевузовского образования, по заявкам университета проходят обучение 19 человек в аспирантуре и 8 человек в докторантуре, что составляет 25% от общего числа сотрудников университета, получающих послевузовское образование.

Важной составляющей подготовки кадров высшей квалификации является работа научных руководителей. Эффективность их работы регулярно обсуждается на заседаниях кафедр и советов факультетов.

В 2014 году научное руководство аспирантами осуществляли 46 человек, из которых 26 человек имели ученую степень доктора наук, 20 человек – кандидата наук. Из них 20 человек (15 докторов и 5 кандидатов) не являлись штатными сотрудниками университета.

В 2015 году научное руководство аспирантами осуществляли 50 человек, из которых 22 человека имели ученую степень доктора наук, 28 человек – кандидата наук. Из них 21 человек (13 докторов и 8 кандидатов) не являлись штатными сотрудниками университета.

На данный момент научное руководство аспирантами осуществляет 51 научный руководитель, из которых 27 человек (53%) имеют ученую степень доктора наук, 24 человека – кандидата наук. Из них 23 человека (16 докторов и 7 кандидатов) не являются штатными сотрудниками университета. Таким образом, 55% научных руководителей являются штатными сотрудниками нашего университета.

Исходя из общего количества защит выпускников аспирантуры, прошедших за три года (18 человек), 15 человек защитилось под руководством научных руководителей из числа сотрудников университета, 3 человека защитилось под руководством научных руководителей, не работающих в ВГУ имени П.М. Машерова.

В университете действует система материального стимулирования молодых ученых, работающих над кандидатскими и докторскими диссертациями, их научных руководителей и консультантов. Научным руководителям, осуществляющим эффективное руководство аспирантами, также предусмотрено снижение учебной нагрузки в рамках выделенных на кафедру ставок.

Наиболее успешно обучающиеся аспиранты получают стипендию Президента Республики Беларусь. В 2014 г. стипендию получали 2 человека (Малаховская В.В.,

Орехова И.А.). В 2015 г. – 3 человека (Дорофеев М.Л., Лисова И.А., Коцур В.М.). В 2016 г. – 1 человек (Плискевич Е.С.).

Аспиранты принимают активное участие в научной деятельности университета. Так, к реализации заданий Государственных программ научных исследований в 2014 и 2015 гг. были привлечены по одному человеку (Никитин А.И., Шабанова Н.Э.), в 2016 г. – три человека (Бахир Ю.Н., Чепелов С.А., Якуто К.Л.). В 2014 году 3 аспиранта (Дорофеев М.Л., Семенова Н.С., Масалкова Ю.Ю.), в 2015 году – 2 (Глазман Л.Я., Марцинкевич А.В.), в 2016 году – 3 человека (Селезнева И.Н., Власенко Ю.М., Шляхто Я.С.) являлись обладателями грантов Министерства образования. Выполняли исследования по грантам Белорусского республиканского фонда фундаментальных исследований в 2014 г. 3 аспиранта (Семенов М.Г., Сосновская Е.А., Лисова И.А.), в 2015 г. – 4 человека (Бувич А.А., Сосновская Е.А., Лисова И.А., Шабанова Н.Э.). В 2016 г. – 2 человека (Марудова А.С., Шабанова Н.Э.).

Согласно рейтингу Министерства образования о подготовке научных работников высшей квалификации за период с 2011 по 2015 г. по числу защит среди учреждений высшего образования республики, находящихся в подчинении Министерства образования, ВГУ имени П.М. Машерова занимает третье место (после БГТУ и БГУ) с коэффициентом 1,56. Он рассчитывается исходя из двух составляющих: количества защит кандидатских и докторских диссертаций на одну кафедру в учреждениях образования и количества защит на одного доктора наук.

В Год науки ВГУ имени П.М. Машерова вступил со знаменательными событиями. Решением Государственного комитета по науке и технологиям Республики Беларусь и Национальной академии наук Беларуси по итогам аккредитации подтвержден статус университета как научной организации.

По решению Государственного экспертного совета Республики Беларусь 15 научных проектов университета нашли государственную поддержку и включены в задания государственных программ научных исследований (ГПНИ) на пятилетний период (2016–2020 гг.).

28 декабря 2016 года решением Высшей аттестационной комиссии Республики Беларусь сразу трем сотрудникам университета присуждены ученые степени и ученое звание: доктора педагогических наук – Николаенко С.В., профессора геологии – Галкину А.Н., кандидата филологических наук – Бувич А.А.; распоряжением Президента Республики Беларусь кандидат исторических наук Николаева И.В., кандидат биологических наук Балаева-Тихомирова О.М. и 18 студентов университета поощрены Специальным фондом Президента Республики Беларусь. По итогам 2016 года более 100 студентов стали победителями XXIII Республиканского конкурса научных работ студентов.

В Год науки учеными университета будут решаться актуальные современные задачи, поставленные, прежде всего, в рамках ГПНИ «Физическое материаловедение, новые материалы и технологии», «Конвергенция – 2020», «Природопользование и экология» по направлениям «Биоразнообразие, биоресурсы, экология» и «Радиация и природные системы», «Экономика и гуманитарное развитие белорусского общества» по направлениям «История и культура», «Социология и философия», «Белорусский язык и литература», «Образование». Особый акцент будет сделан на подготовку научных работников высшей квалификации и поддержку одаренных молодых ученых.

РАЗВИТИЕ ТЕОРИИ МАТЕМАТИЧЕСКОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ И ЕЕ ПРИЛОЖЕНИЯ В ОБРАЗОВАНИИ И ПРОИЗВОДСТВЕННЫХ ПРОЦЕССАХ

МОДЕЛИРОВАНИЕ СПОСОБА ОЦЕНКИ ИННОВАЦИОННЫХ ПРОЕКТОВ

Ю.В. Бекши
Гродно, ГрГУ имени Я. Купалы

Инновации укрепляют свои позиции во всех сферах, повышая уровень и качество жизни. Смартфоны способны обеспечить информацией в любое время, интернет-банкинг сократил время на оплату услуг, SAP – система, с которой управление и контроль внутренних процессов значительно упростили жизнь предприятий. Инновации – это использование новых технологий или услуг, которое приносит определённую прибыль или решает производственные или финансовые проблемы. Следовательно, инновационное проектирование на сегодняшний день играет очень важную роль в экономике. Однако, крайне важно оценить насколько тот или иной проект будет эффективен.

Цель исследования – моделирование способа для изучения показателей экономической эффективности и принципа оценки инновационного проекта.

Материал и методы. Основными показателями экономической эффективности инновационных проектов чаще всего выступают прибыль, период окупаемости, чистый приведенный доход, индекс рентабельности (прибыльности), внутренняя норма прибыли [1].

Результаты и их обсуждение. Норма прибыли – коэффициент, который вычисляется как отношение средней годовой прибыли от инновации к одноразовому начальному капиталу, который использован для реализации нововведения. Этот показатель по своей экономической сущности близок к периоду окупаемости.

Период окупаемости – термин, характеризующий возврат средств в результате внедрения инноваций и полученную при этом прибыль. Кроме того, период окупаемости могут использовать для сравнения его с банковским процентом как макроэкономический критерий эффективности размещения инвестиционных ресурсов. Однако недооценка фактора времени делает эти показатели (прибыль и окупаемость) не достаточно точным, следовательно оценки эффективности инновационного продукта приблизительны.

На практике абсолютная эффективность измеряется следующими показателям [2]:

1. Коэффициент экономической эффективности капитальных затрат:

$$E_p = \frac{\Pi}{K}, \quad (1)$$

где Π – это общее количество прибыли при вложении в модернизацию, техническое перевооружение, в новые объекты в стоимостном выражении.

Π – увеличение прибыли в результате осуществления этого мероприятия, по сравнению с базовым вариантом в стоимостном выражении. K - общая сумма инвестиций.

Вычисленное значение коэффициента должно быть сравниваемым с нормативным коэффициентом E_n (порог). Он может быть принятым по аналогу, устанавливаемом ранее централизованно Министерством экономики: 0,15 – при внедрении новой технологии, 0,12 – при строительстве и расширении предприятий. Проект считается эффективным, если E_p больше E_n .

2. Срок окупаемости капиталовложений – период времени, в течение которого капитальные вложения окупаются за счет полученного дополнительного дохода (экономия расходов):

$$T_p = \frac{1}{E_p}, \quad (2)$$

Срок окупаемости так же сравнивается с нормативным T_n . Проект считается эффективным, если T_p меньше T_n .

3. Годовой экономический эффект от реализации проекта:

$$E = \Pi - E_n \times K, \quad (3)$$

Стоимость инвестиций умножается на нормативный коэффициент экономической эффективности для приведения к одинаковой размерности во времени, потому что прибыль определяется на один год, а инвестиции окупаются на протяжении нескольких лет. Нормативный коэффициент показывает, какая доля инвестиций должна окупиться за год. Чтобы выбрать наилучший вариант коммерческого решения в процессе реализации инноваций, используются показатели сравнительной экономической эффективности – приведенные затраты:

$$Z = C_i + E_n \times K_i, \quad (4)$$

где C_i , K_i – соответственно ежегодные эксплуатационные расходы и инвестиции для i -го варианта. Условием для выбора наилучшего варианта является наименьшее значение затрат. Разница приведенных расходов по двум вариантам характеризует сравнительный эффект от внедрения более эффективного.

Заключение. Необходимость оценки эффективности инновационных проектов возникает в следующих ситуациях: когда существует множество инновационных проектов в различных областях деятельности формы и встает вопрос о приоритетности их финансирования; на начальной стадии разработки инновационного проекта, при возникновении нескольких альтернативных проектов по воплощению инновационной идеи и встает вопрос о выборе наиболее эффективного варианта; на заключительной стадии принятого к реализации инновационного проекта для анализа его результативности.

Предложенная методика применима для первоначальной оценки любого инвестиционного проекта в различных областях экономики.

Список литературы

1. Инновационный проект: понятия, основные этапы создания и реализации [Электронный ресурс]. – Режим доступа: <http://www.technopark.by/business/207.html>. – Дата доступа: 09.01.2017
2. Оценка эффективности инноваций и инновационных проектов [Электронный ресурс]. – Режим доступа: <http://elibr.psu.by:8080/bitstream/123456789/15811/9/%D0%A2%D0%B5%D0%BC%D0%B0%208>. – Дата доступа: 09.01.2017

ФИТТИНГОВЫ ФУНКТОРЫ С ЗАДАНЫМИ СВОЙСТВАМИ ПОКРЫВАЮЩИХ ПОДГРУПП

*Е.А. Витько, Н.Т. Воробьев
Витебск, ВГУ имени П.М. Машерова*

В определениях и обозначениях мы следуем [1].

Основная цель настоящей работы – описание новых свойств фиттинговых функторов.

Пусть U – класс конечных групп, который одновременно является S -замкнутым и N_0 -замкнутым. Все рассматриваемые в работе группы – это группы из класса U .

Напомним, что отображение f , которое каждой группе $G \in U$ ставит в соответствие некоторое непустое множество ее подгрупп $f(G)$, называется фиттинговым U -функтором, если выполняются следующие условия:

(i) если $\alpha: G \rightarrow \alpha(G)$ – изоморфизм, то

$$f(\alpha(G)) = \{\alpha(X) : X \in f(G)\};$$

(ii) если N – нормальная подгруппа группы G , то

$$f(N) = \{X \cap N : X \in f(G)\}.$$

Фиттингов U -функтор называется

1) разрешимым, если $U = S$ – класс всех разрешимых групп;

2) π -разрешимым, если $U = S^\pi$ – класс всех π -разрешимых групп.

Фиттингов U -функтор будем называть фиттинговым функтором для случая, когда $U = E$ – класс всех конечных групп.

Пусть X и Y – непустые классы конечных групп, f – фиттингов U -функтор, F – класс Фиттинга.

Определение 1. Фиттингов U -функтор f назовем (X, Y) -фиттинговым функтором, если

выполняется следующее условие: если $G \in U$, K – нормальная подгруппа группы G , $K \in X$, M – подгруппа группы G такая, что $K \leq M \leq G$ и $M/K \in Y$ и некоторая подгруппа $X \in f(G)$ покрывает M/K , то

$$f(M) = \{Z \cap M \mid Z \in f(G) \text{ и } Z \text{ покрывает } M/K\}.$$

Определение 2. Класс Фиттинга F назовем (X, Y) -классом Фиттинга, если выполняется следующее условие: если $G \in F$, K – нормальная подгруппа группы G , $K \in X$, M – подгруппа группы G такая, что $K \leq M \leq G$ и $M/K \in Y$, то $M \in F$.

Пусть F – непустой класс Фиттинга, обозначим $f = \text{Inj}_F$ и $g = \text{Rad}_F$ – отображения, сопоставляющие группе G множества $\text{Inj}_F(G)$ ее F -инъекторов и $\text{Rad}_F(G)$ ее F -радикалов соответственно.

Доказана

Теорема. Пусть X и Y – непустые классы групп, F – класс Фиттинга. Тогда справедливы следующие утверждения:

- 1) если $U = E$, F – (X, Y) -класс Фиттинга и $S_n X = X$, то Rad_F – (X, Y) -фиттингов функтор;
- 2) если $\pi = \pi^F$, $U = FS^\pi$, F – (X, Y) -класс Фиттинга и $SX = X$, то Inj_F – (X, Y) -фиттингов функтор.

Список литературы

1. Doerk, K. Finite Soluble Groups / K. Doerk, T. Hawkes. – Berlin-New York : Walter de Gruyter, 1992. – 891 p.

ОБ ОДНОМ СВОЙСТВЕ L-КОМПОЗИЦИОННЫХ КЛАССОВ ФИТТИНГА

*Н.Н. Воробьев, А.Р. Кузнецова
Витебск, ВГУ имени П.М. Машерова*

Все рассматриваемые группы конечны. Мы будем использовать терминологию из [1–4].

Напомним, что класс групп F называется классом Фиттинга, если он замкнут относительно взятия нормальных подгрупп и произведений нормальных подгрупп из F .

Символом I обозначают класс всех простых групп. Пусть L – произвольный непустой класс простых групп. Тогда L^+ – совокупность всех абелевых групп из L , а L^- – совокупность всех простых неабелевых групп из L . Символом L' обозначают множество $I \setminus L$.

Пусть X – непустая совокупность групп. Тогда (X) обозначает класс групп, порожденный X ; в частности, (G) – класс всех групп, изоморфных группе G ; $\mathcal{K}(G)$ – класс всех простых групп, изоморфных композиционным факторам группы G . Если $\mathcal{K}(G) \subseteq L$, то G называется L -группой. Через G_L обозначают множество всех L -групп и полагают, что $1 \in G_L$. Пусть $A \in I$. Тогда $G_A = G_{(A)}$, $A' = I \setminus (A)$. Главный фактор H/K группы G называется главным A -фактором, если $\mathcal{K}(H/K) = (A)$. Пусть G_{cA} – класс всех конечных групп, у которых каждый главный A -фактор централен. Если A – неабелева простая группа, то $G_{cA} = G_{A'}$.

Напомним, что для произвольного класса групп $F \ni (1)$, где (1) – класс всех единичных групп, символ G^F обозначает пересечение всех таких нормальных подгрупп N , что $G/N \in F$, а символ G_F – произведение всех нормальных F -подгрупп группы G . Полагают $O^L(G) = G^{G_L}$, $C_A(G) = G^{G_{cA}}$.

Пусть f – произвольная функция вида

$$f: L \cup \{L'\} \rightarrow \{\text{классы Фиттинга}\}. \quad (1)$$

Функции f сопоставляют класс групп

$$CR_L(f) = \{G \mid O^L(G) \in f(L') \text{ и } C_A(G) \in f(A) \\ \text{для всех } A \in L \cap \mathcal{K}(G)\}.$$

Если класс Фиттинга таков, что $F = CR_L(f)$ для некоторой функции f вида (1), то F называют L -композиционным классом Фиттинга с L -композиционной H -функцией f (см. [5]).

Основной результат представляет следующая

Теорема. Пусть F – класс Фиттинга и $F = CR_L(f)$, где $f(A) = F$ для всех $A \in L^- \cup \{L'\}$ и

$G \notin F$. Тогда либо $G^{G^L} \notin G_F$, либо найдется $A \in L \cap \mathcal{K}(G/G_F)$, такая, что $G^{G^{eA}} \notin f(A)$.

Список литературы

1. Скиба, А. Н. Алгебра формаций / А. Н. Скиба. – Минск : Беларуская навука, 1997. – 240 с.
2. Воробьев, Н. Н. Алгебра классов конечных групп / Н. Н. Воробьев. – Витебск : ВГУ имени П. М. Машерова, 2012. – 322 с.
3. Скиба, А. Н. Кратно ω -локальные формации и классы Фиттинга конечных групп / А. Н. Скиба, Л. А. Шеметков // Матем. труды. – 1999. – Т. 2, № 2. – С. 114–147.
4. Скиба, А. Н. Кратно L-композиционные формации конечных групп / А. Н. Скиба, Л. А. Шеметков // Украинский матем. журн. – 2000. – Т. 52, № 6. – С. 783–797.
5. Ведерников, В. А. Ω -расслоенные формации и классы Фиттинга конечных групп / В. А. Ведерников, М. М. Сорокина // Дискретная математика. – 2001. – Т. 13, вып. 3. – С. 125–144.

О КЛАССАХ СОПРЯЖЕННЫХ ИНЪЕКТОРОВ π -РАЗДЕЛИМЫХ КОНЕЧНЫХ ГРУПП

*Н.Т. Воробьев, Т.Б. Василевич
Витебск, ВГУ имени П.М. Машерова*

Все группы, рассматриваемые в данной работе, конечны. В теории конечных разрешимых групп известна теорема Гашюца-Фишера-Хартли [1] о том, что для любого класса Фиттинга F в любой конечной разрешимой группе существуют F -инъекторы и любые два из них сопряжены в этой группе. Данная теорема является обобщением фундаментальных теорем Силова и Холла.

Развитию и обобщению указанной теоремы были посвящены работы Л. А. Шеметкова [2], Н. Т. Воробьева и Го Вэньбиня [3], в которых найдены инъекторы и описано их строение, а также доказана сопряженность инъекторов в частично разрешимых (в частности π -разрешимых) группах.

В настоящей работе мы находим канонические классы сопряженных инъекторов в группах, которые в общем случае не являются π -разрешимыми. Напомним, что конечная группа G называется π -разделимой, если каждый ее главный фактор является либо π -группой, либо π' -группой.

Основная цель настоящей работы – нахождение классов сопряженных F -инъекторов в любой π -разделимой группе.

Материал и методы. Напомним, что *классом групп* [4] является множество групп, которое вместе с каждой своей группой содержит все изоморфные ей группы. *Классом Фиттинга* [4] называют класс групп F , замкнутый относительно нормальных подгрупп и произведений нормальных F -подгрупп.

Пусть \mathbb{P} – множество всех простых чисел, а π – некоторое подмножество множества \mathbb{P} . Дополнение к π во множестве \mathbb{P} обозначим через π' , то есть $\pi' = \mathbb{P} \setminus \pi$. Подгруппу H группы G называют *холловой π -подгруппой* G , если порядок группы G является π -числом, а ее индекс в G – π' -число, индекс такой π -подгруппы не делится на простые числа из множества π .

Если F – непустой класс Фиттинга, то F -радикалом G_F группы G называют наибольшую среди нормальных подгрупп группы G , принадлежащих F . Произведением классов Фиттинга F и H , обозначаемым FH , называется класс всех таких групп G , что $G/G_F \in H$, то есть

$$FH = \{G \mid G/G_F \in H\}.$$

Для каждого непустого класса групп F , подгруппа V группы G называется F -максимальной, если $V \in F$ и $V=U$ всякий раз, когда $V \leq U \leq G$ и $U \in F$. Подгруппа V группы G называется F -инъектором G , если $V \cap K$ является F -максимальной подгруппой K для всякой субнормальной подгруппы K группы G [4].

Характеристика класса X определяется следующим образом

$$\text{Char}(X) = \{p \mid p \in \mathbb{P} \text{ и } Z_p \in X\}.$$

Заметим, что максимальная нормальная π -подгруппа (максимальная нормальная π' -подгруппа) G называется π -радикалом группы G и обозначается G_{E_π} или $O_\pi(G)$ (π' -радикалом G и обозначается $G_{E_{\pi'}}$ или $O_{\pi'}(G)$ соответственно), где E_π и $E_{\pi'}$ – классы Фиттинга всех π -групп и всех π' -групп.

Результаты и их обсуждение.

ТЕОРЕМА. Пусть F и X – классы Фиттинга, G – π -разделимая группа и $\prod \neq \pi \subseteq \mathbb{P}$. Тогда

справедливо одно из следующих утверждений:

1. Если $F = E_{\pi}X$ и $\text{Char}(X) = \pi'$, то G имеет единственный класс сопряженных F -инъекторов и каждый F -инъектор G представим в виде $O_{\pi'}(G)V$, где V – X -инъектор некоторой холловой π' -подгруппы.

2. Если $F = E_{\pi}X$ и $\text{Char}(X) = \pi$, то G имеет единственный класс сопряженных F -инъекторов и каждый F -инъектор G представим в виде $O_{\pi}(G)V$, где V – X -инъектор некоторой холловой π -подгруппы.

Напомним, что группа G называется p -нильпотентной, если G имеет нормальную холлову p -подгруппу и G называется π -нильпотентной, если G p -нильпотентна для всех $p \in \pi$. Группа, имеющая нормальную π -холлову подгруппу называется π -замкнутой группой.

СЛЕДСТВИЕ 1. Каждая π -разрешимая группа имеет единственный класс π -нильпотентных инъекторов.

СЛЕДСТВИЕ 2. Каждая π -разрешимая группа имеет единственный класс π -замкнутых инъекторов.

Заключение. В настоящей работе найдены новые классы сопряженных F -инъекторов в π -разделимой группе.

Список литературы

1. Fischer, B. Injektoren endlicher auflösbarer Gruppen / B. Fischer, W. Gaschütz, B. Hartley // Math.Z. – 1967. – Bd 102, Heft 5. – S. 337–339.
2. Шеметков, Л. А. О подгруппах π -разрешимых групп / Л. А. Шеметков // Конечные группы. – 1975. – С. 207–212.
3. Guo, W. On injectors of finite soluble groups / W. Guo, N.T. Vorob'ev // Comm. Algebra. – 2008. – Vol. 36. – P. 3200–3208.
4. Doerk, K. Finite solvable groups / K. Doerk, T. Hawkes // Berlin–New York : Walter de Gruyter. – 1992. – P.891.

О ФОРМАЦИЯХ ДЁРКА–ХОУКСА

С.Н. Воробьев

Витебск, ВГУ имени П.М. Машерова

В теории классов конечных групп многие исследования по описанию структуры конечных групп и их классов связаны с применением оператора Локетта «*» [1]. Напомним, что оператор «*» сопоставляет каждому непустому классу Фиттинга F наименьший из классов Фиттинга F^* , содержащий F такой, что $(G \times H)_{F^*} = G_{F^*} \times H_{F^*}$ для всех групп G и H . При этом класс Фиттинга F – класс групп, замкнутый относительно нормальных подгрупп и произведений нормальных F -подгрупп. Если F – непустой класс Фиттинга, то символом G_F обозначают наибольшую нормальную F -подгруппу группы G . Ее называют F -радикалом группы G .

Дуальным объектом классу Фиттинга является формация, а F -радикалу группы – ее F -корадикал. Класс групп F называется формацией, если F замкнут относительно гомоморфных образов и подпрямых произведений. Подгруппу G^F называют F -корадикалом группы G , если G^F наименьшая из нормальных подгрупп G такая, что факторгруппа G/G^F является F -группой.

Пусть f – отображение множества всех простых чисел P во множество классов Фиттинга и класс Фиттинга $LR(f) = S_{\pi} \cap (\bigcap_{p \in P} N_p S_{p'})$, где N_p – класс всех p -групп, $S_{p'}$ – класс всех p' -групп ($p' = P \setminus \{p\}$) и $\pi = \{p \in P: f(p) \neq 0\}$.

Класс Фиттинга F называют локальным [2], если $F = LR(f)$. При этом отображение f называют функцией Хартли или H -функцией класса F .

Известно [3], что каждый локальный класс Фиттинга F определяется такой H -функцией F , что $F(p) = F(p)N_p \subseteq F$ для всех $p \in P$. Такую H -функцию называют канонической H -функцией класса F .

Дуализируя результаты Локетта [1], Дерком и Хоуксом [4] был определен оператор « \circ », который сопоставляет каждой непустой формации F наименьшую формацию F° , содержащую F такую, что $(G \times H)^{F^\circ} = G^{F^\circ} \times H^{F^\circ}$ для всех групп G и H .

Определение. Формацию F назовем формацией Дерка-Хоукса или ДН-формацией, если $F = F^\circ$.

Возникает задача описания таких локальных классов Фиттинга, которые являются ДН-формациями. Решение этой задачи – основная цель настоящей работы. Доказана следующая

Теорема. Пусть F – локальный класс, определяемый канонической H -функцией F . Тогда

и только тогда F является ДН-формацией, когда все непустые значения F являются ДН-формациями.

Список литературы

1. Lockett, F.P. The Fitting class F^* / F.P. Lockett // Math. Z. – 1974. – Vol. 137. – S. 131–136.
2. Воробьев, Н.Т. О предположении Хоукса для радикальных классов / Н.Т. Воробьев // Сиб. матем. ж. – 1996. – Т. 37, № 6. – С. 1137–1142.
3. Воробьев, Н.Т. О наибольшей приведенной функции Хартли / Н.Т. Воробьев // Известия Гомельского университета. Вопросы алгебры. – 2000. – №2. – С. 8–13.
4. Doerk, K., Hawkes, T. On the residual of direct product // Arch. Math. – 1978. – Vol. 30. – S. 458–468.

АРХИТЕКТУРА УЧЕБНОГО WEB-ПРИЛОЖЕНИЯ ПО ИССЛЕДОВАНИЮ ОПЕРАЦИЙ

*С.А. Ермоченко, Л.В. Командина
Витебск, ВГУ имени П.М. Машерова*

На кафедре прикладного и системного программирования ведётся разработка различных обучающих приложений по дисциплинам, преподаваемым на кафедре [1, 2]. Направленность таких приложений достаточно разнообразна, от простых электронных версий учебных пособий с более удобной организацией поиска информации, до комплексных приложений, которые позволяют ознакомиться с теорией по учебной дисциплине (при этом в приложении могут специально создаваться различные демонстрационные примеры и другой наглядный материал), получить задания для отработки практических умений и навыков, а также контролировать результаты выполнения заданий, тестов и т.д.

При разработке такого рода приложений использовались различные технологии и подходы. Достаточно простым подходом в таких задачах является разработка настольных (desktop) приложений. Но в таком случае затрудняется интеграция этих приложений между собой, особенно при использовании различных технологий и языков программирования. Также проблемой настольных приложений является безопасность данных, особенно при использовании функционала по контролю уровня усвоения знаний и умений. В случае, когда приложение запускается на компьютере студента, он получает прямой доступ к информации, при этом даже использование алгоритмов шифрования не обеспечивает необходимого уровня защиты.

Альтернативой использования настольных приложений является разработка web-приложений. Web-приложение: позволяет централизованно осуществлять доступ к приложению; не требует установки дополнительного программного обеспечения на клиентские компьютеры; обеспечивает требуемый уровень безопасности данных при контроле уровня усвоения обучающимися материала дисциплин.

Ранее авторами в работе [3] была предложена концепция использования объектно-ориентированного программирования для решения вопроса объединения на единой платформе различных приложений, основной задачей которых является предоставление возможности студентам отработать практические навыки решения различных задач по дисциплине «Исследование операций». В данной работе предложенные ранее идеи находят своё логичное продолжение.

Цель работы – спроектировать архитектуру web-приложения, которое позволит объединить на одной платформе функционал отработки студентами практических навыков решения задач различных дисциплин (а не только дисциплины «Исследование операций»), а также гибко расширять функционал приложения с применением различных технологий программирования.

Актуальность работы заключается в том, что разработанное приложение позволяет экономить время и усилия, как студентов, так и преподавателей, сосредотачивая их внимание именно на методах решения задач, а не на технических тонкостях их реализации.

Материал и методы. Материалом в данной работе послужили разработки студентов математического факультета, ориентированные на использование в различных дисциплинах, преподаваемых на кафедре прикладного и системного программирования; а также ранее предложенная концепция объединения функционала различных приложений на базе одной программ-

ного платформы. Основным методом исследования является объектно-ориентированный анализ и проектирование.

Результаты и их обсуждение. В ранее предложенной концепции [3] управление процессом решения различных задач было объединено в одном алгоритме, реализация которого строилась на идеях обобщённого программирования. При этом для реализации использовался язык программирования Java.

Разработка web-приложения с применением данной концепции не вызывает никаких затруднений, так как Java-технологии в настоящее время в основном и применяются для разработки web-приложений. Однако вопрос интеграции на одной программной платформе различных решений, выполняемых с применением иных технологий и языков программирования требуют проработки архитектуры такого приложения. В качестве основной идеи архитектуры в данной работе предлагается использование сервис-ориентированной архитектуры, базирующейся на концепции REST.

Web-сервисы в своей основе подразумевают, что сервер принимает и передаёт данные в некотором формате, но не занимается визуализацией этих данных. Задача визуализации возлагается на клиентское программное обеспечение. И, в свою очередь, web-сервисы позволяют различным серверам передавать данных от одного сервера другому, обрабатывать и хранить эти данные. Как правило, в качестве формата данных, используемых для коммуникации серверов между собой, используется формат XML или JSON. Первый из них позволяет более строго описать структуру документа и проводить проверку соответствия данных требуемой структуре. Этот формат удобно использовать на публичных сервисах, функционал которых может использоваться любым сервером в сети Интернет. Формат JSON не так строго описывает структуру и семантику данных, он не позволяет требовать от разработчиков определённой структуры этих данных. Но в то же время формат является достаточно простым, имеет не такой большой по сравнению с форматом XML объём технической информации.

Для реализации web-сервисов могут использоваться различные технологии, реализующие RPC (Remote Procedure Calling). В данной работе предлагается использовать концепцию REST (Representational State Transferring), так как в рамках этой концепции сервер не сохраняет состояние клиента, что делает разработку более гибкой, а компоненты приложения независимыми друг от друга.

Для согласования работы основного web-приложения с REST-сервисами, реализующими вспомогательные задачи и разработанные на базе других технологий, предлагается использовать реализацию абстрактных классов для поддерживаемых задач, которые будут проксировать вызовы методов к удалённым сервисам, обеспечивая базу для интеграции компонент.

Заключение. В работе была предложена и спроектирована архитектура web-приложения, базирующаяся на концепции REST, позволяющая гибко добавлять различные задачи для тренировки студентами, интегрировать приложение с другими приложениями учебного характера и обеспечивать необходимый уровень безопасности данных. Спроектированная архитектура используется в настоящее время как база для выполнения дипломного проекта «Разработка программы-тренажёра для отработки навыков решения математических задач», выполняемого на кафедре прикладного и системного программирования. Использование такого приложения может повысить эффективность процесса обучения в рамках дисциплин кафедры.

Список литературы

1. Макеева И. В., Разработка приложения для решения задач на графах и сетях // Материалы I Международной научно-практической конференции студентов и магистрантов «Молодость. Интеллект. Инициатива», Витебск, 18-19 апреля 2013 г. – Витебск: ВГУ имени П. М. Машерова, 2013. – С. 23-24.
2. Рудак С. С., Разработка обучающего приложения по теме «Транспортная задача в матричной постановке» // Материалы международной научно-практической конференции студентов, аспирантов, молодых учёных «IX Машеровские чтения», Витебск, 25 сентября 2015 г. – Витебск: ВГУ имени П. М. Машерова, 2015. – С. 26-27.
3. Ермоченко С. А., Командина Л. В. Применение объектно-ориентированного программирования при разработке учебных приложений по исследованию операций // Наука – образованию, производству, экономике: материалы XXI(68) Региональной научно-практической конференции преподавателей, научных сотрудников и аспирантов, Витебск, 11-12 февраля 2016 г.: в 2 т. / ВГУ имени П. М. Машерова.: редколлегия: И. М. Прищепа (гл. ред.) [и др.]. – Витебск: ВГУ имени П. М. Машерова, 2016. – Т. 1. – С. 15-16.

О ГИПОТЕЗЕ ЛОКЕТТА ДЛЯ ПРОИЗВЕДЕНИЙ РАЗРЕШИМЫХ КЛАССОВ ФИТТИНГА

Е.Н. Залесская
Витебск, ВГУ имени П.М. Машерова

Все рассматриваемые в работе группы конечны.

Классическими объектами исследования в теории классов групп и ее приложениях являются разрешимые группы. Более полуторовековая история развития теории разрешимых групп связана с крупнейшими достижениями в этой области.

Со второй половины 60-х годов важное место в теории разрешимых групп стали занимать исследования, связанные с классами Фиттинга. Напомним, что классом Фиттинга или радикальным классом называется класс групп, замкнутый относительно нормальных подгрупп и их произведений. Впервые классы Фиттинга упоминаются в статье Фишера [1] в 1966 году.

В 70-е годы XX века в теории разрешимых групп сформировался ряд проблем, связанных с построением структурной теории классов Фиттинга. Среди них центральное место занимала общая проблема определения структуры класса Фиттинга, известная в теории классов групп под названием «гипотеза Локетта».

Гипотеза (Локетт, 1974, [2]). Каждый ли класс Фиттинга F определяется как пересечение некоторого нормального класса Фиттинга и класса Локетта, порожденного F ?

Напомним, что нормальный класс Фиттинга – такой класс Фиттинга F , у которого в любой группе G ее F -радикал G_F является F -максимальной подгруппой G . Кроме того, каждому непустому классу Фиттинга F Локетт [2] сопоставляет класс F^* , который определяется как наименьший из классов Фиттинга, содержащий F , такой, что для все групп G и H справедливо равенство $(G \times H)_{F^*} = G_{F^*} \times H_{F^*}$, и класс F_* как пересечение всех таких классов Фиттинга X , для которых $X^* = F^*$. Класс Фиттинга F называют классом Локетта [2], если $F = F^*$.

Примечателен тот факт, что первоначально гипотеза Локетта была подтверждена для следующих отдельных случаев локального класса Фиттинга: наследственного (Брайс, Косси, 1975 г., [3]), классов вида XN , $XS_\pi S_\pi$ (Бейдлеман, Хаук, 1979 г., [4]), классов вида $X(\bigcap_{p \in \pi} S_p S_p)$ (Дерк, Хоукс, 1992 г., [5]). Для произвольных локальных классов Фиттинга указанная гипотеза подтверждена в разрешимом случае в 1988 году Н.Т.Воробьевым [6] и в произвольном случае в 1996 году Галледжи [7].

Для отдельных случаев частично локальных классов Фиттинга гипотеза Локетта была подтверждена Н.Т. Воробьевым, Е.Н. Залесской и Н.Н. Воробьевым в 2007 году [8], Е.Н. Залесской и Ж.П. Макаровой в 2012 году [9]. Для некоторых семейств произведений классов Фиттинга конечных групп гипотеза Локетта была подтверждена Е.Н. Залесской в 2016 году [10].

Однако проблема описания классов Фиттинга, являющихся произведениями разрешимых классов Фиттинга и удовлетворяющих гипотезе Локетта, остается по-прежнему актуальной.

Целью данной работы является описание произведений разрешимых классов Фиттинга, которые удовлетворяют гипотезе Локетта.

Материал и методы. Объектом исследования являются классы Фиттинга конечных групп. В работе используются методы теории классов Фиттинга, методы теории формаций, методы теории решеток.

Следующая теорема доказана в классе S всех конечных разрешимых групп.

Теорема. Пусть X и Y – разрешимые классы Фиттинга, причем $S_* \subseteq XY$. Тогда класс XY удовлетворяет гипотезе Локетта.

Список литературы

1. Fischer, B. Klassen konjugierter Untergruppen in endlichen auflösbaren Gruppen / B. Fischer. - Habilitationsschrift, Universität Frankfurt (M). - 1966.
2. Lockett, P. The Fitting class F^* / P.Lockett. - Math. Z. - 1974. - Vol.137, №2. - P. 131-136.
3. Bryce, R.A. A problem in Theory of normal Fitting classes / R.A. Bryce, J. Cossey // Math. Z. - 1975. - Vol. 141, №2. - P. 99-110.
4. Beidleman, J.C. Uber fittingklassen und Lockett-Vermutung / J.C. Beidleman, P. Hauck // Math. Z. - 1979. Bd.167, №2. - S. 161-167.
5. Doerk, K. Finite solvable groups / K. Doerk, T. Hawkes // Walter de Gruyter. - 1992. - New York, Berlin. - 891p.
6. Воробьев, Н.Т. О радикальных классах конечных групп с условием Локетта / Н.Т. Воробьев // Матем. заметки. - 1988. - Т.43, №2. - С. 161-168.

7. Gallego, M.P. Fitting pairs from direct limits and the Lockett conjecture / M.P. Gallego // Comm. Algebra - 1996 - Vol.24, №6. – P. 2011-2023.
8. Воробьев, Н.Т. О проблемах структуры классов Фиттинга / Н.Т. Воробьев, Е.Н. Залеская, Н.Н. Воробьев // Веснік ВДУ. – 2007. – №2 (44). – С. 105-108.
9. Залеская, Е.Н. О гипотезе Локетта для классов Фиттинга конечных групп / Е.Н. Залеская, Ж.П.Макарова // Веснік ВДУ. – 2012. – №6. – С.15-19.
10. Залеская, Е.Н. Гипотеза Локетта для произведений классов Фиттинга конечных групп / Е.Н. Залеская // Веснік ВДУ. – 2016. – №1. – С. 5-8.

ПОСТРОЕНИЕ И ИСПОЛЬЗОВАНИЕ СТОХАСТИЧЕСКИХ МАТЕМАТИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ В ЛЕСОПРОМЫШЛЕННОМ КОМПЛЕКСЕ

*В.В. Игнатенко
Минск, БГТУ*

Основой любого развитого государства является мощная экономика, но она немислима без точных наук, краеугольным камнем которых является математика. Используя математические методы, строятся математические модели для технологических процессов, технических устройств, экономических задач и т.д. Решая эти модели и проводя анализ полученных решений, принимаются производственные решения, которые позволяют вести эффективное управление тем или иным процессом. Эта задача особенно актуальна на современном этапе развития экономики.

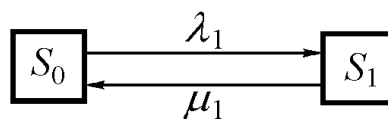
Цель работы – показать, как можно строить и использовать стохастические математические модели в лесопромышленном комплексе.

Материал и методы. В качестве объекта исследования рассматриваются лесопромышленные систем без запаса древесины. К ним могут относиться: сортировочные лесотранспортеры, окорочные станки, лесопильные рамы и другие [1, с. 96-116]. Математические модели строятся методами теории массового обслуживания с использованием дифференциальных уравнений Колмогорова для состояний системы [2].

Результаты и их обсуждение. Пусть лесопромышленная система состоит только из одного станка и к нему поступает на обработку пуассоновский поток предметов труда с интенсивностью λ_1 , зависящий, в общем случае, от времени $\lambda_1 = \lambda_1(t)$.

Обработка предмета труда осуществляется с изменяющейся продолжительностью цикла $t_{ц}$, распределенного по показательному закону с параметром $\mu_1 = \mu_1(t)$.

Запишем математическую модель задачи. Функционирование рассматриваемой системы можно представить следующей схемой (графом) состояний:



Система может находиться в следующих состояниях: S_0 – оборудование исправно и простаивает из-за отсутствия предметов обработки по организационным причинам; S_1 – оборудование осуществляет обработку предмета труда.

Обозначим вероятности состояния S_0 как $P_0(t)$, а S_1 как $P_1(t)$. Для любого времени функционирования системы t : $P_0(t) + P_1(t) = 1$.

Математическая модель функционирования системы представляет собой систему дифференциальных уравнений Колмогорова

$$\begin{cases} \frac{dP_0}{dt} = -\lambda_1 P_0 + \mu_1 P_1 \\ \frac{dP_1}{dt} = -\mu_1 P_1 + \lambda_1 P_0 \end{cases}$$

В первое уравнение системы подставим вместо P_1 его выражение $P_1 = 1 - P_0$, тогда

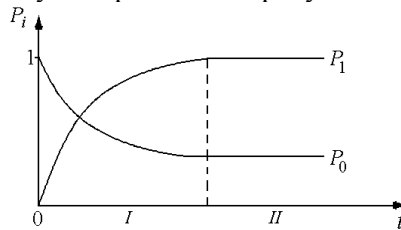
$$\begin{cases} \frac{dP_0(t)}{dt} = -\lambda_1 P_0 + \mu_1 (1 - P_0), \\ \frac{dP_1(t)}{dt} = -(\lambda_1 + \mu_1) P_1 + \lambda_1 P_0 \end{cases}$$

При $\lambda_1 = \text{const}$ и при начальных условиях $P_0(0)=1, P_1(0)=0$ получим решение

$$P_0 = \frac{\mu_1}{\lambda_1 + \mu_1} + \frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \mu_1} e^{-(\lambda_1 + \mu_1)t}$$

В начале работы машина свободна и $P_0=1$. По мере вступления в работу вероятность P_0 уменьшается и в пределе достигает значения $\mu_1/(\lambda_1 + \mu_1)$.

Вероятность работы машины соответственно растёт и достигает значения $\lambda_1 / (\lambda_1 + \mu_1)$. Зависимости вероятностей функционирования системы при постоянной интенсивности поступления предмета труда на обработку изображены на рисунке



Зона I представляет собой период пуска системы с отработкой режимов эксплуатации.

В установившемся режиме эксплуатации ($t \rightarrow \infty$) при $\lambda_1 = \text{const}$, $P_0 = \text{const}$, $P_1 = \text{const}$ (финальные вероятности, зона II):

$$\frac{dP_0}{dt} = 0; \frac{dP_1}{dt} = 0.$$

Система дифференциальных уравнений трансформируется в систему линейных алгебраических уравнений:

$$\begin{cases} 0 = -\lambda_1 P_0 + \mu_1 P_1, \\ 0 = -\mu_1 P_1 + \lambda_1 P_0, \\ P_0 + P_1 = 1 \end{cases}$$

Тогда расчетные формулы будут иметь следующий вид:

$$P_0 = \frac{\mu_1}{\lambda_1 + \mu_1} \quad P_1 = \frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \mu_1} \quad \lambda_1 = \frac{1}{t_n} \quad \mu_1 = \frac{1}{t_u}$$

где t_n – среднее значение времени между поступлениями предметов труда на обработку; t_u – средняя продолжительность цикла обработки предмета труда. Вероятность P_1 представляет собой коэффициент использования рабочего времени машины.

Пример. Система раскряжёвки (распиловка бревен или хлыстов на сортименты нужной длины) работает с циклом обработки $t_u=1$ мин. Интенсивность подачи можно изменять. Необходимо установить рациональную интенсивность подачи и цикл подачи хлыста. Интенсивность обработки составит $\mu_1=1$ хлыст/мин.

Зададимся различными значениями λ_1 . При интенсивности подачи 1 хлыст/мин вероятность работы системы составит 0,5. Начиная с $\lambda_1=5-6$, дальнейшее увеличение параметра существенно не повысит рабочего состояния. Рациональный цикл подачи хлыстов составит $t_{II} = \frac{1}{\lambda} = 0,2$ мин. Полученное значение цикла подачи хлыста позволяет выбирать подающий механизм: растаскиватель, манипулятор или другие устройства.

Если система работает в режиме $\frac{\lambda_1}{\mu_1} \geq 1$, то подающий механизм вынужден простаивать либо предметы труда накапливаются перед обрабатывающей установкой.

Заключение. Поскольку, в лесопромышленном комплексе на работу различных агрегатов влияет большое количество случайных факторов и построить детерминированные математические модели чаще всего невозможно, то нужно строить и исследовать стохастические модели.

Использование математических моделей играет большую роль в современной экономике. Поэтому при преподавании высшей математики, особенно в технических и экономических университетах, больше внимания нужно уделять построению математических моделей, реальных производственных задач. Уместно вспомнить высказывание академика В.И. Арнольда, “умение составлять адекватные математические модели реальных ситуаций должно составлять неотъемлемую часть математического образования” [3.с. 28].

Список литературы

1. Игнатенко В.В., Турлай И.В., Федоренчик А.С. Моделирование и оптимизация процессов лесозаготовок. – Мн: БГТУ, 2004. – 180 с.
2. Гнеденко Б.В. Введение в теорию массового обслуживания / Б.В. Гнеденко, И.Н. Коваленко. – М: Наука, 1966. – 152 с.
3. Арнольд, В.И. «Жесткие» и «мягкие» математические модели. – М. МЦНМО, 2000. – 32 с.

УПРАВЛЕНИЕ АСИМПТОТИЧЕСКИМИ ИНВАРИАНТАМИ ДВУМЕРНЫХ ЛИНЕЙНЫХ НЕСТАЦИОНАРНЫХ СИСТЕМ С НАБЛЮДАТЕЛЕМ

*А.А. Козлов, А.Д. Бурак
Новополоцк, ПГУ*

Сегодня одной из активно развивающихся как в Республике Беларусь, так и за рубежом, областей математических исследований является теория управления асимптотическими характеристиками (инвариантами) линейных систем обыкновенных дифференциальных уравнений [1]. Это связано с тем, что полученные в этой теории результаты позволяют для управляемой динамической системы (механической, физической, технической) строить такие управления, которые бы воздействовали на ее устойчивость. При этом устойчивость здесь понимается в самом широком смысле – это и устойчивость по Ляпунову, и асимптотическая устойчивость, и равномерная асимптотическая устойчивость, и орбитальная устойчивость и др. Все зависит лишь от выбора тех асимптотических инвариантов [1], подлежащих управлению, которые отвечают за требуемый тип устойчивости. Данная особенность рассматриваемой теории определяет ее прикладной характер, поскольку, результаты, получаемые в ней, могут находить непосредственное применение при решении различных задач стабилизации управляемого объекта, являющейся важной характеристикой физической или механической системы.

В настоящее время достаточно хорошо изучены задачи управления асимптотическими инвариантами в лишь *классе линейных систем без наблюдателя*: с гладкими или кусочно-гладкими коэффициентами (Гайшун И.В, Смирнов Е.Я., Борухов В.Т, Тонков Е.Л.), с равномерно непрерывными и кусочно-постоянными коэффициентами (Тонков Е.Л, Попова С.Н., Макаров Е.К., Зайцев В.А), а также во множестве линейных систем малых размерностей без наблюдателя с локально интегрируемыми и интегрально ограниченными коэффициентами (А.А. Козлов, А.Д. Бурак, И.В. Инц). Поэтому результаты данной работы, посвященные решению задач глобального управления асимптотическими инвариантами двумерных линейных систем с наблюдателем, коэффициенты которых не удовлетворяют ни условиям гладкости, ни условиям равномерной непрерывности, являются новыми и актуальными.

Материал и методы. В представленной работе объектом для изучения являются линейные управляемые системы с разрывными и быстро осциллирующими коэффициентами и наблюдателем. При исследовании глобальной управляемости асимптотических инвариантов таких систем применяются методы матричного и функционального анализа, теории дифференциальных уравнений, теории управления системами, а также теории управления асимптотическими инвариантами нестационарных систем.

Результаты и их обсуждение. Обозначим через \mathbb{R}^n евклидово векторное пространство размерности n , а через \mathbb{M}_m – пространство вещественных $(m \times n)$ -матриц со спектральной (операторной) нормой. Рассмотрим линейную нестационарную управляемую систему

$$\dot{x} = A(t)x + B(t)u, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad u \in \mathbb{R}^m, \quad t \dots 0. \quad (1)$$

с наблюдателем

$$y = C^T(t)x, \quad y \in \mathbb{R}^k, \quad t \dots 0. \quad (2)$$

Будем считать, что коэффициенты $A(\cdot)$, $B(\cdot)$ и $C(\cdot)$ принадлежат классу локально интегрируемых по Лебегу и интегрально ограниченных матричных функций, т.е. таких, которые удовлетворяют соотношениям

$$\sup_{t..0} \int_{t..0}^{t+1} PA(\tau)P d\tau < a < \infty, \quad \sup_{t..0} \int_{t..0}^{t+1} PB(\tau)P d\tau < b < \infty, \quad \sup_{t..0} \int_{t..0}^{t+1} PC(\tau)P d\tau < c < \infty.$$

Будем далее предполагать, что

1) система (1) является *равномерно вполне управляемой*, т.е. существуют такие числа $\sigma > 0$ и $\gamma > 0$, что при любых $t_0 \dots 0$ и $x_0 \in \mathbb{R}^n$ найдется измеримое и ограниченное управление $u : [t_0, t_0 + \sigma] \rightarrow \mathbb{R}^m$, при всех $t \in [t_0, t_0 + \sigma]$ удовлетворяющее неравенству $Pu(t)P, \gamma Px_0 P$ и переводящее вектор начального состояния $x(t_0) = x_0$ системы (1) в ноль на этом отрезке.

2) система (1), (2) с нулевым управлением, т.е.

$$\dot{x} = A(t)x, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad t \dots 0, \quad (3)$$

$$y = C^T(t)x, \quad y \in \mathbb{R}^k, \quad t \dots 0, \quad (4)$$

обладает *свойством равномерной полной наблюдаемости*, т.е. найдется такое $\sigma > 0$, что при любом $t_0 \dots 0$ всякое начальное состояние системы $x(t_0) \in \mathbb{R}^n$ может быть однозначно определено по наблюдению (4) на $[t_0, t_0 + \sigma]$.

Рассмотрим задачу о построении линейной обратной связи $u = U(t)x$ в системе (1), (2), позволяющей управлять асимптотическими характеристиками этой системы. Для ее решения воспользуемся подходом, основанным на построении системы асимптотической оценки состояния. Такой подход изначально был дан в работе Р. Калмана [2] для стационарных систем (1), (2), а затем успешно обобщен на нестационарные систем В.А. Зайцевым [3] и им же применен для решения задачи стабилизации линейной нестационарной управляемой системы (1), (2) с наблюдателем и локально интегрируемыми с *квадратом* матричными коэффициентами A, B и C .

Построим по системе (1), (2) и выходу асимптотический идентификатор

$$\dot{x} = A(t)x + V(t)(y(t) - C^T(t)x) + B(t)u, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad t \dots 0, \quad (5)$$

где $x(t)$ – оценка состояния системы (1), (2). Возьмем управление в (5)

$$u = U(t)x. \quad (6)$$

Матричные управления $U(\cdot)$ и $V(\cdot)$ в системе (5) будем считать измеримыми и ограниченными на положительной полуоси матричными функциями со значениями в пространствах M_{mn} и M_{nk} соответственно.

Подставив управление (6) в систему (1), (2), (5), получим $(2n)$ -мерную линейную систему

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A(t) & B(t)U(t) \\ V(t)C^T(t) & A(t) + B(t)U(t) - V(t)C^T(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ x \end{pmatrix}, \quad t \dots 0. \quad (7)$$

Введем вектор отклонения $\tilde{x}(t) = x(t) - x(t)$ состояния $x(t)$ системы (1), (2) от оценки состояния $x(t)$. С помощью невырожденной замены переменных $\begin{pmatrix} x \\ x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E & 0 \\ E & -E \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ x \end{pmatrix}$ систему

(7) приведем к системе

$$\begin{pmatrix} \dot{\tilde{x}} \\ \tilde{x} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A(t) + B(t)U(t) & -B(t)U(t) \\ 0 & A(t) - V(t)C^T(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{x} \\ \tilde{x} \end{pmatrix}, \quad (8)$$

управляя асимптотическими инвариантами которой, мы, тем самым, будем управлять и асимптотическими характеристиками системы (1), (2), замкнутой линейной обратной связью $u = U(t)x$. Тогда имеет место

Теорема. Пусть $n = 2$. Если система (1) равномерно вполне управляема, система (3), (4) равномерно вполне наблюдаема, то система (8) обладает свойствами

1) глобальной управляемости верхнего центрального показателя (α , значит, она равномерно стабилизируема);

2) глобальной управляемости характеристических показателей Ляпунова (и поэтому, она асимптотически устойчива);

3) глобальной ляпуновской приводимости, т.е. для произвольной наперед заданной $(2n)$ -мерной линейной системы с локально интегрируемыми и интегрально ограниченными коэффициентами найдутся такие допустимые управления $U(\cdot)$ и $V(\cdot)$, что система (8) с этими управлениями будет асимптотически эквивалентна выбранной системе.

Заключение. Представленные результаты позволяют свое обобщение на случай произвольной размерности фазового пространства.

Работа выполнялась в рамках проекта БРФФИ Ф16М-006.

Список литературы

1. Макаров Е.К., Попова С.Н. Управляемость асимптотических инвариантов нестационарных линейных систем. – Минск: Беларус. навука, 2012.
2. Калман Р., Фалб П., Арбиб М. Очерки по математической теории систем. – М., 2004.
3. Зайцев В.А. Ляпуновская приводимость и стабилизация нестационарных систем с наблюдателем // Дифференц. уравнен., 2010. – Т. 46. – №3. – С. 432–442.

ВЛИЯНИЕ ОПРЕДЕЛЯЮЩИХ ПАРАМЕТРОВ НА ПОТЕРЮ УСТОЙЧИВОСТИ СЛОИСТОЙ КОМПОЗИТНОЙ ОБОЛОЧКИ ПРИ КОМБИНИРОВАННОМ НАГРУЖЕНИИ

*Е.А. Корчевская
Витебск, ВГУ имени П.М. Машерова*

Слоистые оболочки и конструкции широко используются в различных областях современной техники. Использование слоев со специальными свойствами позволяет создавать высокопрочные конструкции, которые обладают хорошей тепло-, электро- и звукоизоляцией, высокой стойкостью к агрессивным средам. В составе слоистой конструкции слои из высокопрочных материалов являются несущими и воспринимают основную часть нагрузки, а маложесткие слои связывают между собой несущие и работают в основном на поперечный сдвиг.

В работе предлагается использовать уравнения слоистых оболочек, учитывающие параметры поперечных сдвигов, полученные Э.И. Григolloком и Г.М. Куликовым[1] с использованием обобщенной кинематической гипотезы Тимошенко. Для исследования свободных колебаний здесь используется асимптотический метод П.Е. Товстика[2], согласно которому, благодаря локализации форм колебаний и форм потери устойчивости в окрестности некоторой образующей $\varphi = \varphi_0$, двумерные уравнения, описывающие состояние слоистых оболочек, можно свести к последовательности одномерных краевых задач.

Целью данной работы является исследование влияния поперечных сдвигов на устойчивость слоистой оболочки при комбинированном нагружении.

Материал и методы. Рассмотрим задачу о потере устойчивости слоистой цилиндрической оболочки при комбинированном нагружении, учитывая усилие сдвига T_{12}^0 , внутреннее давление, наличие которого приводит к появлению растягивающих усилий T_2^0 и осевые растягивающие усилия T_1^0 . Обозначим $\langle T_1^0, T_2^0, T_{12}^0 \rangle = \lambda E h \varepsilon^5 \langle t_1^0, \varepsilon_2^0, t_3^0 \rangle$. Края оболочки предполагаются шарнирно опертыми.

Для описания такого состояния, используем систему полубезмоментных уравнений слоистых оболочек[1], записанные в безразмерном виде:

$$\varepsilon^4 \left(-\varepsilon^3 \tau \Delta \right) \chi + \frac{\partial^2 F^*}{\partial s^2} - \lambda \left(t_1^0 \frac{\partial^2}{\partial s^2} + 2\varepsilon t_3^0 \frac{\partial^2}{\partial s \partial \varphi} + \varepsilon^2 t_2^0 \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \right) \left(-\varepsilon^2 \kappa \Delta \right) \chi^* = 0 \quad (1)$$

$$\varepsilon^4 \Delta^2 F^* - \frac{\partial^2}{\partial s^2} \left(-\varepsilon^2 \kappa \Delta \right) \chi^* = 0,$$

где $F^* = F/EhR^2\mu^4$, $\chi^* = \chi/R$ – безразмерные функции напряжений и перемещений,

Δ – оператор Лапласа в криволинейной системе координат φ, s ,

$\lambda > 0$ – параметр нагружения, который связан с усилием сдвига $T_{12}^0 = \lambda Eh \varepsilon^5 t_3^0$,

ε – малый параметр, характеризующий относительную толщину оболочки, и имеет вид:

$$\varepsilon^8 = h^2 \eta_3 / \left[2R^2 \left(-v^2 \right) \right].$$

Здесь τ, κ – параметры, учитывающие осредненные эффекты поперечных сдвигов и вводятся по формулам:

$$K/\pi^2 = \varepsilon^2 \kappa, \quad K\theta/\pi^2 = \varepsilon^3 \tau, \quad \kappa, \tau \sim 1 \text{ при } \varepsilon \rightarrow 0.$$

Решение задачи (1) будем искать в виде [2]:

$$\chi^*(s, \varphi, \varepsilon) = \chi^{**} \exp \left\{ i \left(\varepsilon^{-1/2} q \xi + \frac{1}{2} a \xi^2 \right) \right\},$$

$$F^*(s, \varphi, \varepsilon) = F^{**} \exp \left\{ i \left(\varepsilon^{-1/2} q \xi + \frac{1}{2} a \xi^2 \right) \right\}, \quad \chi^{**} = \sum_{j=0}^{\infty} \varepsilon^{j/2} \chi_j(\xi, s), \quad (2)$$

$$F^{**} = \sum_{j=0}^{\infty} \varepsilon^{j/2} f_j(\xi, s), \quad \lambda = \lambda_0 + \varepsilon \lambda_1 + \varepsilon^2 \lambda_2 + \dots,$$

где $\chi_j(\xi, s)$, $f_j(\xi, s)$ – полиномы по ξ , имеющие достаточное число раз дифференцируемые по s коэффициенты. Исходя из требования убывания решения (2) вдали от образующей $\xi = 0$, принимаем: $q > 0$, $\text{Im} a > 0$.

Результаты и их обсуждение. Рассмотрим краевую задачу, возникающую в нулевом приближении:

$$\left(\frac{1 + \kappa q^2}{q^4} \right) \frac{\partial^4 \chi_0}{\partial s^4} + q^4 \chi_0 -$$

$$- \lambda_0 \left(t_1^0 \left(+\kappa q^2 \frac{\partial^2 \chi_0}{\partial s^2} + 2i q t_3^0 \left(+\kappa q^2 \frac{\partial \chi_0}{\partial s} - q^2 t_2^0 \left(+\kappa q^2 \chi_0 \right) \right) \right) \right) = 0 \quad (3)$$

$$\chi_0 = \frac{\partial^2 \chi_0}{\partial s^2} = 0 \quad \text{при } s = 0, \quad s = l(\varphi). \quad (4)$$

Решение ищем в виде:

$$\chi_0 = \sum_{k=1}^4 c_k \exp(i q^2 x_k s), \quad (5)$$

причем для x_k получаем уравнение четвертой степени:

$$x^4 + \tilde{h} x^2 + \tilde{\lambda} x + \tilde{k} = 0,$$

$$\tilde{h} = \lambda_0 t_1^0, \quad \tilde{\lambda} = \frac{2\lambda_0 t_3^0}{q}, \quad \tilde{k} = \frac{1}{1 + \kappa q^2} + \frac{\lambda_0 t_2^0}{q^2}. \quad (6)$$

Корни уравнения (6) представим в виде:

$$x_{1,2} = a_1 \pm i a_2, \quad x_{3,4} = -a_1 \pm a_3, \quad (7)$$

тогда

$$3a_1^2 = a_3^2 - \frac{\tilde{h}}{2} + \left[3\tilde{k} + \left(2a_3^2 + \frac{\tilde{h}}{2} \right)^2 \right]^{1/2}, \quad a_2^2 = 2a_1^2 + a_3^2 - \tilde{h},$$

$$\tilde{\lambda} = 2a_1 \sqrt{a_2^2 + a_3^2}. \quad (8)$$

Для рассматриваемых граничных условий разрешающие уравнения для определения параметра λ_0 имеет вид:

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \left(q^2 l_0 a_3 \right) = & - \frac{8a_1^2 a_2 a_3}{\left(a_1^2 + 2a_3^2 + \tilde{h} \right) + 4a_1^2 \left(a_1^2 + \tilde{h} \right)} \times \\ & \times \left[\operatorname{cth} \left(q^2 l_0 a_2 \right) \frac{\cos \left(q^2 l_0 a_1 \right)}{\operatorname{sh} \left(q^2 l_0 a_2 \right) \cos \left(q^2 l_0 a_3 \right)} \right] \end{aligned} \quad (9)$$

где $l_0 = l \sqrt{\epsilon_0}$.

Уравнение (9) удобно решать численно, используя формулы (6) и (8).

Заключение. В результате проведения серии вычислительных экспериментов при различных значениях параметров поперечных сдвигов установлено, что увеличение параметра поперечного сдвига приводит к увеличению значения касательных напряжений при кручении, а увеличение осевого растягивающего напряжения приводит к уменьшению касательных напряжений. Также получены зависимости параметра нагружения от поперечных сдвигов.

Список литературы

1. Григолоук, Э.И. Многослойные армированные оболочки: расчет пневматических шин / Э.И. Григолоук, Г. М. Куликов. – М.: Машиностроение, 1988. – 288 с.
2. Товстик, П. Е. Устойчивость тонких оболочек: асимптотические методы / П.Е. Товстик. – М.: Наука. Физматлит, 1995. – 320 с.

ОСОБЕННОСТИ РЕАЛИЗАЦИИ МЕТОДА КУТТЕРА–ДЖОРДАНА–БОССЕНА ДЛЯ СКРЫТОЙ ПЕРЕДАЧИ ДАННЫХ

*Е.А. Краснобаев
Витебск, ВГУ имени П.М. Машерова*

Как известно, для обеспечения конфиденциальности данных и безопасной их передачи, чаще всего применяются методы криптографии. В случае, когда необходимо сохранить в тайне сам факт такой передачи, используются методы стеганографии. Одной из разновидностей скрытой передачи цифровых данных является добавление дополнительной информации в мультимедийные объекты, в частности, в цифровые изображения. Известным является метод Куттера–Джордана–Боссена, который позволяет встраивать информацию в канал синего цвета изображения, имеющего RGB-кодирование, поскольку к синему цвету зрительная система человека является наименее чувствительной.

Целью работы является компьютерная реализация метода Куттера–Джордана–Боссена для цифровых изображений, определение точности дешифрования данных из изображения, нахождение путей повышения данной точности.

Материал и методы. В качестве исходных данных брались: растровое изображение формата BMP или JPG, исходный тест для зашифровки в формате TXT (ANSI). Выходные данные: модифицированное растровое изображение в формате BMP или JPG, расшифрованный тест в формате TXT. Для вставки текста в изображение использовалась модификация метода компьютерной стеганографии: метод Куттера–Джордана–Боссена, реализованный в среде MSVS 2010.

Результаты и их обсуждение. Рассмотрим алгоритм передачи одного бита секретной информации в предложенном методе [1]. Пусть M_i – бит, который подлежит встраиванию, $C = \{R, G, B\}$ – изображение-контейнер, $p = (x, y)$ – псевдослучайный пиксель контейнера, в который будет выполняться встраивание. Секретный бит M_i встраивается в канал синего цвета путем модификации яркости $\lambda_{x,y} = 0,3R_{x,y} + 0,59G_{x,y} + 0,11B_{x,y}$:

$$B_{x,y}^* = \begin{cases} B_{x,y} - \nu \lambda_{x,y}, m_i = 0 \\ B_{x,y} + \nu \lambda_{x,y}, m_i = 1 \end{cases},$$

где ν – константа, равная 0,01-0,5, $B_{x,y}$ – исходное значение синей компоненты пикселя (x,y) , $B_{x,y}^*$ – соответственно, зашифрованное значение.

Получатель извлекает бит, не имея первичного изображения, то есть, «вслепую». Для этого выполняется предсказание значения первичного, не модифицированного пикселя на основе значений соседних пикселей. Для получения оценки пикселя предложено использовать значение нескольких пикселей, размещенных в том же столбце и в той же строке массива графического контейнера.

$$\hat{B}_{x,y}^* = \frac{1}{4\sigma} \left[\sum_{i=-\sigma}^{\sigma} B_{x+i,y}^* + \sum_{j=-\sigma}^{\sigma} B_{x,y+j}^* - 2B_{x,y}^* \right],$$

σ – количество пикселей сверху (снизу, слева, справа) от оцениваемого пикселя (в случае «креста» 7×7 , $\sigma = 3$).

При извлечении встроенного бита вычисляется разница δ между текущим $B_{x,y}^*$ и прогнозируемым $\hat{B}_{x,y}^*$ значениями интенсивности пикселя:

$$\delta = B_{x,y}^* - \hat{B}_{x,y}^*$$

Знак δ будет означать встроенный бит: если $\delta < 0$, то $M_i = 0$; если $\delta > 0$, то $M_i = 1$.

При реализации данного подхода определены следующие особенности.

Для наилучшего распознавания величина δ должна быть максимизирована. Однако при этом искажения, вносимые в изображение, становятся максимальными, и ухудшается скрытность. При значениях пикселей: $B_{x,y} > B_{\max} - \nu\lambda_{x,y}$ и $B_{x,y} < \nu\lambda_{x,y}$, разность по модулю будет $|B_{x,y}^* - B_{x,y}| < \nu\lambda_{x,y}$. Прогнозное значение $\hat{B}_{x,y}^*$ при этом будет близко к текущему $B_{x,y}^*$, что может приводить к ошибкам дешифровки.

Предлагаемый путь решения проблемы – это предварительная обработка изображения, по следующей формуле:

$$B'_{x,y} = \begin{cases} B_{x,y} - \nu B_{\max}, & B_{x,y} \geq B_{\max} - \nu\lambda_{x,y} \\ B_{x,y} + \nu B_{\max}, & B_{x,y} \leq \nu\lambda_{x,y} \end{cases}$$

где $\nu = 0,15$, $B_{\max} = 255$ (в случае 24 бита на пиксель). Данное преобразование соизмеримо по скрытности с самим наложением текста.

Это позволяет существенно увеличить точность расшифровки без визуального изменения изображения всего за один проход, т.е. без дублирования пикселей (см. табл. 1).

Таблица 1 – Сравнение методов обработки

	Без предварительной обработки	С предварительной обработкой
Точность расшифровки байтов текста	42%	90%

Также при реализации данного метода важно придерживаться принципа расчета прогнозного значения пикселя только по незашифрованным (неизменным) соседним пикселям. Это приводит к тому, что крест оцениваемого пикселя не должен пересекаться с крестами соседей [1]. Это приводит к тому, что емкость зашифровки текста в изображении будет уменьшена. Например, для изображения 800×600 пикселей максимальный объем текста для зашифровки будет значительно меньше 60000 знаков (1 знак – 1 байт). Причиной уменьшения объема также является отсутствие шифрования на границе изображения.

Одним из путей решения этой проблемы является выбор оцениваемых пикселей не по кресту, длины σ , а по квадрату. Это позволяет более плотно расположить в изображении зашифрованные пиксели и увеличить емкость изображения см. Рис. 1.

Измерения показали, что точность расшифровки текста при этом остается на том же уровне.

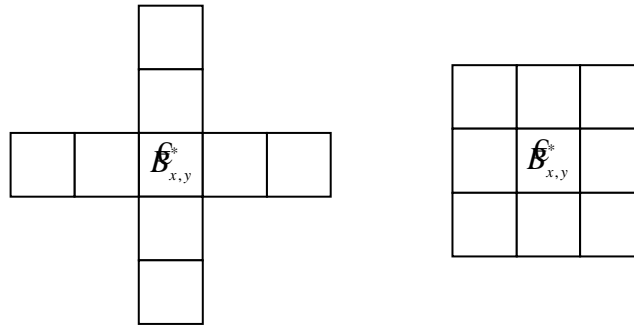


Рисунок 1. Способ выбора соседних пикселей для оценки значения центрального

Заключение. В результате для изображения с разрешением 2560x1920 пикселей стало возможным закодировать без дублирования около 68 000 знаков. Точность расшифровки достигла 90%, что позволяет передать смысл текста. Для достижения более высокой точности предлагается использовать, как и в [1], дублирование бит. Но с учетом модификаций алгоритма количество дублирований, по нашей оценке, снизится на порядок.

Список литературы

1. Конахович Г.Ф. Компьютерная стеганография. Теория и практика / Г. Ф. Конахович, А. Ю. Пузыренко – Изд-во: МК-Пресс, 2006. – 288 с.

О СТОУНОВЫХ РЕШЕТКАХ ЧАСТИЧНО КОМПОЗИЦИОННЫХ ФОРМАЦИЙ

А.П. Мехович

Витебск, ВГУ имени П.М. Машерова

Все рассматриваемые группы конечны. Будем использовать стандартную терминологию из [1, 2].

Напомним, что *формацией* называется класс групп, замкнутый относительно гомоморфных образов и конечных подпрямых произведений.

В произвольной группе G выберем систему подгрупп $\tau(G)$. Говорят, что τ – подгрупповой функтор (в терминологии А.Н. Скибы) [1], если выполняются следующие условия:

- 1) $G \in \tau(G)$;

- 2) для любого эпиморфизма $\varphi: A \rightarrow B$ и для любых групп $H \in \tau(A)$ и $T \in \tau(B)$ имеет место $H^\varphi \in \tau(B)$ и $T^{\varphi^{-1}} \in \tau(A)$.

Рассматриваются лишь такие подгрупповые функторы τ , что для любой группы G все подгруппы, входящие в $\tau(G)$, субнормальны в G .

Формация F называется τ -замкнутой, если $\tau(G) \subseteq F$ для любой ее группы G из F [1].

Для произвольной τ -замкнутой ω -композиционной формации F через $L_{\omega\tau}(F)$ обозначают решетку всех τ -замкнутых ω -композиционных подформаций формации F .

Пусть L – решетка с 0. Тогда элемент a^* называется *псевдодополнением* элемента a решетки L , если из $a \wedge a^* = 0$ и $a \wedge x = 0$ следует, что $x \leq a^*$. Решетка с 0 называется *решеткой с псевдодополнениями*, если каждый ее элемент обладает псевдодополнением. Дистрибутивная решетка с псевдодополнениями, каждый элемент которой удовлетворяет тождеству

$$a^* \vee (a^*)^* = 1$$

называется *стоуновой решеткой*.

Доказана следующая

Теорема. Пусть F – τ -замкнутая ω -композиционная формация. Тогда решетка $L_{\omega\tau}(F)$ стоунова в том и только в том случае, когда $F \subseteq N$.

Список литературы

1. Скиба, А.Н. Алгебра формаций / А.Н. Скиба. – Минск : Беларуская навука, 1997. – 240 с.
2. Скиба, А.Н. Кратно L-композиционные формации конечных групп / А.Н. Скиба, Л.А. Шеметков // Украинский матем. журн. – 2000. – Т. 52, № 6. – С. 783–797.

О НЕКОТОРЫХ ПОДГРУППАХ ПОЛУГРУПП ЛИНЕЙНЫХ ОТНОШЕНИЙ

М.И. Наумик
Витебск, ВГУ имени П.М. Машерова

Пусть V – конечномерное векторное пространство над полем K , $LR(V)$ – полугруппа всех линейных отношений пространства V . Хорошо известно, что $LR(V)$ является регулярной отношений. В то же время она не является инверсной полугруппой. Л.Б. Шнеперманом [1] были перечислены все максимальные инверсные подполугруппы полугруппы $\text{End}V$ всех линейных преобразований пространства V . Однако вопрос о строении этих подполугрупп не ставился. Е.Н. Клейман [2], дает описание максимальных инверсных подполугрупп полугруппы $\text{End}V$, используя подход из статьи И.О. Корякова [3]. Заметим также, что это описание было инспирировано работой М. Путчи [4]. В данной работе перечисляются все максимальные инверсные подполугруппы полугруппы $LR(V)$.

Для полугруппы S через $E(S)$ будем обозначать множество идемпотентов S . Для всех $x \in LR(V)$ через $\text{rank } x$ обозначим ранг линейного отношения x . Пусть F – некоторая полурешетка с дополнениями в $LR(V)$. Это означает, что F состоит из попарно коммутирующих идемпотентов [5]. Пусть $pr_1F = \ker F \oplus V_1 \oplus V_1'$, а $pr_2F = \text{coker}F \oplus V_2 \oplus V_2'$, где $\ker F = \bigcap_{x \in F} \ker x$, $\text{coker}F = \bigcap_{x \in F} \text{coker} x$, V_1, V_1', V_2, V_2' – фиксированные подпространства из V . Положим $L(F) = \{V_2'/x \in F\}$, $R(F) = \{x \in LR(V)/V_2, V_2' \in L(F)\}$.

Пусть $x \in R(F)$. Тогда $pr_1x = \ker x \oplus V_2$, $pr_2x = \text{coker}x \oplus V_2'$, где $V_2, V_2' \in L(F)$, $pr_1x = pr_1F$, $pr_2x = pr_2F$, $\ker x = \ker F \oplus V_1'$, $\text{coker}x = \text{coker}F \oplus V_2$.

Можно определить элемент $\tilde{x} \in R(F)$ условиями $pr_1\tilde{x} = \ker x \otimes V_2'$, $\ker \tilde{x} = \ker x$, $pr_2\tilde{x} = \text{coker}x \otimes V_1'$, $\text{coker} \tilde{x} = \text{coker}x$, если $(a, b) \in x$, $a \in V_1, b \in V_2$, то $(b, a) \in \tilde{x}$. Из определения \tilde{x} , следует, что $x\tilde{x}x = x$, $\tilde{x}x\tilde{x} = \tilde{x}$. Основным результатом является

Теорема. Пусть F – полурешетка с дополнениями в $LR(V)$. Тогда

$$B = \{x \in R(F) / xF\tilde{x} \subseteq F, \tilde{x}Fx \subseteq F\} \quad (1)$$

есть максимальная инверсная полугруппа в $LR(V)$. Обратно, если B – максимальная инверсная подполугруппа в $LR(V)$, то $F = E(B)$ – полурешетка с дополнениями и B имеет вид (1).

Теорема. Две максимальные инверсные подполугруппы полугруппы $LR(V)$ подобны тогда и только тогда, когда подобны их подполугруппы идемпотентов.

Теорема. Существует лишь конечное число неподобных максимальных инверсных подполугрупп полугруппы $LR(V)$.

Эта работа обобщает результат [1].

Список литературы

1. Шнеперман, Л.Б. Максимальные инверсные подполугруппы полугруппы линейных преобразований / Л.Б. Шнеперман // Изв. вузов. Математика. – 1974. – № 11. – С. 93–100.
2. Клейман, Е.И. О строении максимальных инверсных подполугрупп полугруппы линейных преобразований / Е.И. Клейман // Исслед. алгебр. систем. – Свердловск. – 1989. – С. 80–85.
3. Коряков, О.И. Линейные периодические полугруппы с центральными идемпотентами / О.И. Коряков // Исслед. алгебр. систем по свойствам их подсистем. – Свердловск. – 1987. – С. 72–80.
4. Putcha, M.B. Conjugacy classes in algebraic monoids / M.B. Putcha // Trans. Amer. Math. Soc. – 1937. – Vol. 303, № 2. – P. 529–540.
5. Наумик, М.И. О некоторых свойствах коммутативных подполугрупп идемпотентов полугруппы $LR(V)$ / М.И. Наумик // Международная науч.-практ. конф., Минск, 5–10 сент. – Минск, 2016. – Ч. 5. – С. 44–45.

**ГЛОБАЛЬНОЕ СУЩЕСТВОВАНИЕ РЕШЕНИЙ
ДЛЯ СИСТЕМ ПОЛУЛИНЕЙНЫХ ПАРАБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ
С ЛИНЕЙНЫМИ НЕЛОКАЛЬНЫМИ ГРАНИЧНЫМИ УСЛОВИЯМИ**

*А.И. Никитин
Витебск, ВГУ имени П.М. Машерова*

Рассматривается следующая система нелинейных уравнений с нелокальными граничными условиями:

$$\begin{cases} u_t = \Delta u + c_1(x,t)v^p, v_t = \Delta v + c_2(x,t)u^q, x \in \Omega, t > 0, \\ \frac{\partial u(x,t)}{\partial n} = \int_{\Omega} k_1(x,y,t)u(y,t)dy, x \in \partial\Omega, y \in \Omega, t > 0, \\ \frac{\partial v(x,t)}{\partial n} = \int_{\Omega} k_2(x,y,t)v(y,t)dy, x \in \partial\Omega, y \in \Omega, t > 0, \\ u(x,0) = u_0(x), v(x,0) = v_0(x), x \in \Omega, \end{cases} \quad (1)$$

где p, q – положительные константы, Ω – ограниченная область в $\mathbb{R}^n, n \geq 1$, с достаточно гладкой границей $\partial\Omega$, n – внешняя единичная нормаль к $\partial\Omega$.

Относительно данных задачи (1) будем предполагать следующее:

$$\begin{aligned} c_i(x,t) &\in C_{loc}^\alpha(\bar{\Omega} \times [0, +\infty)), 0 < \alpha < 1, c_i(x,t) \geq 0, i = 1, 2; \\ k_i(x,y,t) &\in C(\partial\Omega \times \bar{\Omega} \times [0, +\infty)), k_i(x,y,t) \geq 0, i = 1, 2; \\ u_0(x), v_0(x) &\in C^1(\bar{\Omega}), u_0(x) \geq 0, v_0(x) \geq 0 \text{ в } \Omega; \\ \frac{\partial u_0(x)}{\partial n} &= \int_{\Omega} k_1(x,y,t)u_0(y,t)dy, \frac{\partial v_0(x)}{\partial n} = \int_{\Omega} k_2(x,y,t)v_0(y,t)dy \text{ на } \partial\Omega. \end{aligned}$$

Теорема 1. Пусть $pq \leq 1$. Тогда задача (1) имеет глобальное решение.

Рассмотрим вспомогательную задачу:

$$\begin{cases} f'(t) = r_1(t)g^p(t), g'(t) = r_2(t)f^q(t), t > a, \\ f(a) = f_a > 0, g(a) = g_a > 0, \end{cases} \quad (2)$$

где $p > 0, q > 0, a > 0, r_1(t)$ и $r_2(t)$ – неотрицательные непрерывные при $t \geq a$ функции. Условия существования и отсутствия глобальных решений задачи (2) исследовались, например, в работах [1,2].

Введем обозначения

$$\begin{aligned} \underline{c}_i(t) &= \inf_{\Omega} c_i(x,t), \underline{k}_i(t) = \inf_{\Omega} \int_{\Omega} k_i(x,y,t)dx, i = 1, 2, \\ \underline{z}_1(t) &= \underline{c}_1(t) \exp\left(p \int_0^t \underline{k}_2(\tau)d\tau - \int_0^t \underline{k}_1(\tau)d\tau\right), \\ \underline{z}_2(t) &= \underline{c}_2(t) \exp\left(q \int_0^t \underline{k}_1(\tau)d\tau - \int_0^t \underline{k}_2(\tau)d\tau\right), \\ \tilde{k}_i(t) &= |\partial\Omega| \inf_{\Omega \times \partial\Omega} k_i(x,y,t), i = 1, 2. \end{aligned}$$

Предположим, что существуют такие постоянные α, t_0, K такие, что $\alpha > t_0$ и

$$\int_{t-t_0}^t \frac{\tilde{k}_i(\tau)d\tau}{\sqrt{t-\tau}} \geq K \text{ для всех } t \geq \alpha, i = 1, 2. \quad (3)$$

Теорема 2. Пусть $pq > 1$, выполнены условия (3) и задача (2) с $r_i(t) = A_i \underline{z}_i(t), i = 1, 2$ при любых f_a, g_a и $A_i > 0, i = 1, 2$ не имеет глобального решения. Тогда задача (1) не имеет нетривиального глобального решения.

Обозначим

$$\bar{c}_i(t) = \sup_{\Omega} c_i(x, t), \bar{k}_i(t) = |\partial\Omega| \sup_{\Omega \times \partial\Omega} k_i(x, y, t), i = 1, 2,$$

$$\bar{z}_1(t) = \bar{c}_1(t) \exp\left(p \int_0^t \bar{k}_2(\tau) d\tau - \int_0^t \bar{k}_1(\tau) d\tau\right),$$

$$\bar{z}_2(t) = \bar{c}_2(t) \exp\left(q \int_0^t \bar{k}_1(\tau) d\tau - \int_0^t \bar{k}_2(\tau) d\tau\right).$$

Предположим, что существуют такие постоянные α, t_0, K такие, что $\alpha > t_0$ и

$$\int_{t-t_0}^t \frac{\bar{k}_i(\tau) d\tau}{\sqrt{t-\tau}} \geq K \text{ для всех } t \geq \alpha, i = 1, 2. \quad (4)$$

Теорема 3. Пусть $pq > 1$, выполнены условия (4) и задача (2) с $a=0$ и $r_i(t) = A_i \bar{z}_i(t)$ при любых $A_i > 0, i=1, 2$ и некоторых начальных данных имеет глобальные решения. Тогда задача (1) имеет глобальные решения для достаточно малых начальных данных.

Список литературы

1. Коньков А.А. О некоторых априорных оценках для решений систем обыкновенных дифференциальных уравнений типа Эмдена-Фаулера // Математические заметки, 2003, Т. 73, Вып. 5, С. 792–796.
2. Рабцевич В.А. О быстрорастущих решениях систем Эмдена-Фаулера произвольного порядка // Дифференциальные уравнения, 1998, Т. 34, № 2, С. 222–227.

МОДЕЛИРОВАНИЕ УПРУГОГО ОСНОВАНИЯ ПРИ ИССЛЕДОВАНИИ УСТОЙЧИВОСТИ ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ОБОЛОЧЕК

*Т.В. Никонова
Витебск, ВГТУ*

В современном транспортном и промышленном строительстве, в качестве составных и несущих частей различных конструкций, находят широкое применение тонкостенные цилиндрические оболочки. Способность этих оболочек выдерживать значительные нагрузки при минимальной толщине позволяет создавать из них легкие конструкции с хорошими жесткостными и прочностными характеристиками. Поэтому исследования, позволяющие углубить и расширить знания в области цилиндрических оболочек, лежащих на упругом основании, являются актуальными. Целью исследования является моделирование реакции упругого основания, позволяющей аналитически исследовать устойчивость конструкции без проведения экспериментальных испытаний.

Материал и методы. Материалом исследования является тонкостенная цилиндрическая оболочка, залегающая на упругом основании. В качестве метода исследования используется моделирование упругого основания изотропным упругим полупространством [1], причем считаем, что коэффициент постели основания c зависит от характера волнообразования на поверхности оболочки при потере устойчивости. Предполагая, что между основанием и оболочкой имеется жесткий контакт, имеем

$$c = c_1 \sqrt{k_1^2 + k_2^2}, \quad c_1 = \frac{2E_0(1-\nu_0)}{(1+\nu_0)(3-4\nu_0)}, \quad k_1 = \frac{\pi n}{L}, \quad k_2 = \frac{m}{R}, \quad (1)$$

где E_0, ν_0 – модуль Юнга и коэффициент Пуассона для упругого основания, n – число полу-волн в осевом направлении, m – число волн в окружном направлении, k_1, k_2 – волновые числа, связанные с формой волнообразования оболочки при потере устойчивости, R, L – радиус и длина оболочки, соответственно.

Следует учитывать, что область применимости модели упругого полупространства ограничена рядом условий [1]: эту модель следует использовать вдали от краев оболочки, глубина

основания H должна быть больше, чем длина характерной полуволны $l_1 = \pi/\sqrt{k_1^2 + k_2^2}$, длина характерной полуволны l_1 должна быть существенно меньше радиуса R оболочки.

Результаты и их обсуждение. Рассмотрим случай длинной цилиндрической оболочки, находящейся под воздействием тангенциального усилия T_2^0 , лежащей на упругом основании, моделируемом упругим полупространством. В соответствии с принимаемой моделью, реакция основания зависит от характера волнообразования на поверхности оболочки.

В этом случае формула для нахождения тангенциального усилия T_2^0 имеет вид:

$$T_2^0 = -\frac{Eh \left[(\lambda^2 + m^2)^2 - 2m^2 + 1 \right] + \lambda^4 / (\lambda^2 + m^2)^2 + c_2 \sqrt{\lambda^2 + m^2}}{m^2 - 1 - m^2 \lambda^2 / (\lambda^2 + m^2)^2}, \quad (2)$$

где E, h – модуль Юнга и толщина оболочки, ε – малый параметр, $\lambda = \pi R n / L$, $c_2 = c_1 R / (Eh)$.

Критическое тангенциальное усилие T_2^* может быть найдено путем минимизации усилия $|T_2^0|$ по переменным m и n при фиксированных значениях E, ν_0 . Так как коэффициент c связан со значениями k_1 и k_2 , то при минимизации (2) будет учтена зависимость реакции основания от формы волнообразования при потере устойчивости.

Для оболочек средней длины ($\varepsilon^2 \ll 1$ и $\lambda \sim 1$) $\lambda \ll m$. Тогда, пренебрегая λ^2 и 1 по сравнению с m^2 , из (2) получим приближенную формулу

$$T_2^* = -\min_m \left[\frac{Eh \left[\varepsilon^8 m^4 + \lambda^4 / m^4 + c_2 m \right]}{m^2} \right], \quad n = 1, \quad (3)$$

справедливую для случая, когда $\varepsilon^8 m^4 \sim \lambda^4 / m^4 \sim c_2 m$ при $\varepsilon \rightarrow 0$. Формула отличается от аналогичной формулы, полученной Товстиком П.Е., наличием слагаемого $c_2 m$, учитывающего наличие упругого основания, реакция которого зависит от характера волнообразования на поверхности оболочки.

Если оболочки длинные ($\lambda \leq \varepsilon^2$) и $\varepsilon^8 m^3 \sim c_2$ при $\varepsilon \rightarrow 0$, то, опустив второе слагаемое в (3), находим

$$T_2^* = -\min_m \left[\frac{Eh \left[\varepsilon^8 m^3 + c_2 \right]}{m} \right], \quad n = 1. \quad (4)$$

Здесь потеря устойчивости происходит при одном из целых m , ближайших к

$$m_0 = \sqrt[3]{\varepsilon^{-8} c_2 / 2}. \quad (5)$$

Заключение. Для длинных оболочек при $c_2 \sim \varepsilon^8$, из (3) получаем формулу

$$T_2^* = -\frac{Eh^3}{4R^2(1-\nu^2)} - \frac{4E_0(1-\nu_0)R}{3(1+\nu_0)(3-4\nu_0)}, \quad (6)$$

имеющую место при $m = 2$, $n = 1$ и обобщающую формулу Грасгофа – Бресса на случай оболочки, лежащей на упругом основании с реакцией, зависящей от характера волнообразования на поверхности оболочки. Соотношения (3),(4),(6) позволяют решить задачу об устойчивости цилиндрической оболочки на упругом основании с реакцией, зависящей от числа волн на поверхности оболочки, а также модуля Юнга и коэффициента Пуассона упругого основания.

Список литературы

1. Товстик, П.Е. Локальная устойчивость пластин и пологих оболочек на упругом основании / П.Е. Товстик // Изв. РАН. МТТ. – 2005. – №1. – С. 147-160.

ВНУТРЕННЕЕ ПОЗИЦИОНИРОВАНИЕ, ОРИЕНТИРОВАНИЕ И НАВИГАЦИЯ ВНУТРИ ЗДАНИЙ

*В.В. Новый, С.А. Ермоченко
Витебск, ВГУ имени П.М. Машерова*

Системы визуализации интерьера здания часто носят не только репрезентативную функцию, но и служат основой для внутреннего позиционирования и навигации в пределах зданий. Они востребованы в различных ситуациях и областях – от работы служб спасения до логистики и услуг, основанных на местоположении пользователя. Для вуза подобная система может быть полезна при проведении централизованного тестирования, конференции, для облегчения адаптации первокурсников, поиска необходимых отделов учреждения.

Использование современных вычислительных средств и мобильной техники значительно упрощает эти действия. Традиционные средства ориентирования и навигации в зданиях зачастую служат средством дезинформации потенциальных пользователей. Например, расположенная в холле первого этажа ВГУ имени П.М. Машерова информация о размещении кафедр и некоторых общеуниверситетских отделов устарела более чем на 5 лет.

Целью работы является анализ построения систем визуализации интерьеров зданий с применением различных подходов и их сравнение между собой.

Материал и методы. Материалом исследования данной работы являются модели и методы автоматизации ориентации и навигации внутри зданий. Предметом данной работы являются подходы к построению подобных систем для мобильных устройств. В качестве методов исследования используются как общенаучные методы, такие как анализ, сравнение, обобщение, так и частные методы программной инженерии.

Результаты и их обсуждение. Рассмотрим первый вариант реализации системы визуализации интерьеров зданий, представляющий собой web-приложение на основе сферических панорам. Данное приложение использует хранилище фотографий интерьера здания, выполненных по специальной методике, и реализует их отображение и обработку на стороне клиента (браузера) [1].

При подготовке фотографий необходимо выполнять съёмку из одной точки, но в различных направлениях. Фотографии затем объединяются в одну большую фотографию с использованием специального алгоритма, который формирует сферическую панораму. Клиент позволяет пользователю просматривать эту панораму и взаимодействовать с активными точками панорамы. При этом пользователь может вращать камеру в произвольных направлениях, однако у него нет возможности перемещаться по панораме (можно перемещаться только между различными панорамами).

Плюсами такого подхода является высокая наглядность и реалистичность интерьера; возможность использования системы для представления определенных объектов в Интернете. Минусами этой системы является привязка к конкретным версиям используемых технологий. Также стоит отметить высокую сложность подготовки качественного контента: требуется специальное аппаратное обеспечение (фотоаппарат со штативом с приспособлением для круговой съемки), программное обеспечение, благоприятные условия съемки (равномерное освещение интерьера при съемке в разных направлениях, отсутствие людей в области съемки, чтобы избежать артефактов на изображениях). При размещении панорамы в Интернет также предъявляются достаточно высокие требования к аппаратному обеспечению для воспроизведения – широкополосное подключение к сети, производительность вычислительной системы. Эти проблемы частично решаются применением технологии адаптивной загрузки изображений, позволяющей выбирать качество (низкое или высокое) загружаемых фотографий, что позволяет избежать загрузки большого объема данных и их медленной обработки за счёт снижения качества отображаемой панорамы.

Разработанная web-система позволяет осуществить перенос приложения на мобильную платформу с использованием одной из следующих технологий: Phone Gap, Apache Cordova, Ionic [2]. Это достигается за счёт применения при реализации web-системы клиентских web-технологий.

Рассмотрим теперь второй вариант реализации системы визуализации интерьеров зданий в виде нативного (платформозависимого) автономного приложения. Плюсами этого подхода

являются высокая скорость реакции на действия пользователя, возможность задействовать все доступные датчики платформы, позволяющие осуществлять анализ положения устройства в помещении. Кроме того, перемещение камеры по такой модели может быть произвольным (не только переходы между контрольными точками - точками съёмки).

Минусами такого приложения являются меньшая реалистичность за счёт использования двухмерного представления плана или трёхмерного моделирования интерьера, а не его фотографического изображения. В дальнейшем возможно реализовать приложение с применением библиотеки OpenGL ES, что позволит частично решить проблему за счёт улучшенной детализации трёхмерных моделей. Однако это приведёт и к повышению объёма хранимой модели, и к повышению требований к аппаратной части.

В перспективе можно реализовать следующий подход: разработать приложение с применением клиент-серверной архитектуры. Сервер, доступный по Wi-Fi локально или через Интернет, будет отвечать за хранение контента, обновление данных о помещениях (аудиториях), таких как назначение аудитории (лекционная аудитория, компьютерный или другой специализированный класс, кабинет отдела, кафедры, деканата, и каких именно), состояние кабинета (ремонт), привязка к расписанию (какие занятия, мероприятия и т.д. проводятся).

На стороне клиента возможна реализация корректировки внутреннего позиционирования по идентификаторам беспроводных сетей [3]. Также есть возможность отслеживать положение клиентов, что позволит пользователю определять, где в здании он находится. Для решения этой задачи традиционно используют технологии GPS или Глонасс. Однако внутри зданий эти технологии практически бесполезны, так как соответствующие сенсоры не в состоянии поддерживать связь со спутниками из-за потери сигнала. Для этой цели можно использовать данные мобильной сети, но это тоже не даёт практически применимых результатов, так как точность такого позиционирования достаточно низкая, а для внутреннего позиционирования погрешность в 1-2 метра уже довольно значительна, так как в здании это может соответствовать соседним помещениям.

Для решения, ориентированного на конкретное здание (например, на здание университета), возможно использование визуальных данных пользователя или механизма распознавания контрольных точек (таблички на аудиториях или другие визуальные маркеры).

Заключение. В работе были описаны подходы к организации систем визуализации интерьеров зданий, выявлены плюсы и минусы каждого подхода. Также в работе рассмотрена возможность позиционирования через использование карты идентификаторов Wi-Fi сетей. За рамками этой работы осталась инерциальная навигация на основе датчиков мобильного устройства (акселерометр, магнетометр). Такие технологии позволяют повысить точность позиционирования, однако требуют наличия современных устройств у пользователей системы. Но, с другой стороны, применение таких технологий делает возможным использования технологии дополненной реальности в системе визуализации интерьеров.

Список литературы

1. Алексеев А. А. Конструирование интерактивных 3D-панорам средствами языка JavaScript / А. А. Алексеев // Материалы III Международной научно-практической конференции студентов и магистрантов «Молодость. Интеллект. Инициатива», Витебск, 23-24 апреля 2015 г. – Витебск: ВГУ имени П. М. Машерова, 2015. – С. 21-22.
2. Documentation – Apache Cordova / The Apache Software Foundation [Электронный ресурс удалённого доступа]. Режим доступа: <https://cordova.apache.org/docs/en/latest/>. Дата доступа: 10.01.2017.
3. Karimi, H. A. Indoor Wayfinding and Navigation. – CRC Press, 2015. – P. 266.

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ОПИСАНИЕ ПРОЦЕССА РАСТВОРЕНИЯ ОЗОНА ПО ВЫСОТЕ СТОЛБА ЖИДКОСТИ

*В.И. Романовский, В.В. Лихавицкий, С.В. Красковский
Минск, БГТУ*

Использование озона в технологии водоподготовки нашло широкое распространение в последние годы, в частности в процессах обеззараживания, дезинфекции и обезжелезивания. Это связано с рядом причин, в первую очередь высокой окислительной способностью озона.

При использовании озона основной стадией является растворение озона в воде. Как известно растворение озона в воде описывается законом Генри. Также в литературе присутствуют

данные по растворимости озона в воде в зависимости от температуры по данным Хорватса, а также справочнику растворимости Когана В. Б. Названные источники позволяют теоретически спрогнозировать равновесную концентрацию озона на различных глубинах, однако на практике данная концентрация может сильно отличаться, т.к. на ее значение будет оказывать ряд факторов: наличие окисляемых веществ, концентрация озона в газовой смеси, давление, размер пузырьков газа, создаваемых аэратором и ряд других.

Цель данной работы – провести математическое описание процесса растворения озона в воде от ряда эксплуатационных параметров.

Изучение закономерностей растворения озона в воде по высоте столба жидкости от параметров обработки являются необходимыми для разработки новых технологий дезинфекции сооружений водоснабжения с использованием озона. Представленные в литературе сведения по растворимости озона в воде позволяют рассчитать только равновесную концентрацию в системе жидкость-газ без учета других факторов.

Проведенные ранее авторами [1–4] исследования позволили установить влияние каждого из изменяемого параметра на остаточную концентрацию озона в воде.

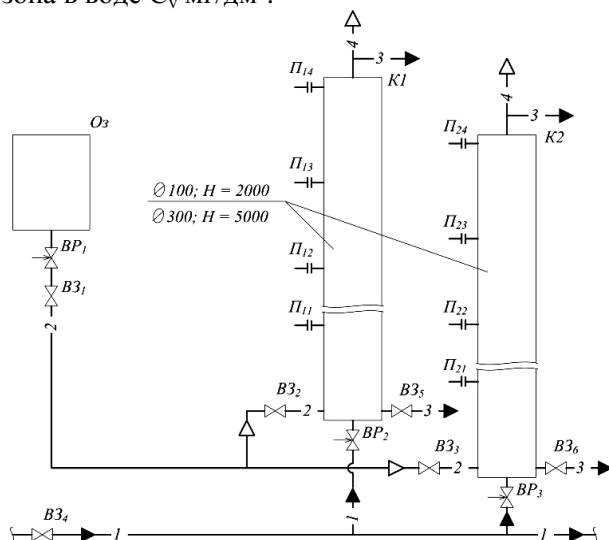
Материал и методы. Для определения растворимости озона в воде по высоте столба жидкости была собрана экспериментальная установка по схеме, изображенной на рис. 1.

Установка представляет собой пластиковую трубу: первая имеет диаметр 0,1 м и высоту 2 м, вторая – диаметр 0,3 м и высоту 5 м. В трубе сделаны отверстия для отбора проб с шагом 0,5 м.

Для генерации использовался экспериментальный озонатор фирмы ООО «РовалантСпецСервис» и озонатор фирмы Finnegan-Reztek (США). Для определения массового содержания озона в газовой фазе использовали анализатор озона ВМТ 961 фирмы Ozone Systems & Technology International (США). Определение концентрации озона в водопроводной воде проводили по ГОСТ 18301–72 «Вода питьевая. Методы определения содержания остаточного озона». Чувствительность метода 0,05 мг O_3 /дм³.

При проведении эксперимента использовались следующие интервалы варьирования выбранных параметров:

- диаметр моделируемой скважины $D = 0,1–0,3$ м;
- концентрация озона в газовой смеси $C_r = 2,7–55$ г/м³;
- время насыщения воды $T = 10–60$ мин;
- высота отбора пробы $H = 0–3$ м;
- расход озоновоздушной смеси $Q = 3,3–700$ дм³/мин;
- концентрация озона в воде C_v мг/дм³.



O_3 – генератор озона; $K1–2$ – колонна; $B3_{1–6}$ – вентиль запорный; $BP_{1–3}$ – вентиль регулирующий; $П_{11–24}$ – проботборный штуцер.

1 – вода со скважины; 2 – озоновоздушная смесь; 3 – сброс воды; 4 – выброс газа.

Рис. 1 – Схема экспериментальной установки

Для оценки величины линейной связи между переменными параметрами и выбора вида уравнения математической модели применялся выборочный коэффициент корреляции. С учетом принятой формы уравнений регрессии с использованием статистических данных с помощью метода наименьших квадратов было рассчитано уравнение регрессии. Оценка адекватности полученного уравнения производилась по соотношению расчетного и табличного значения критерия Фишера при уровне значимости 5%. представлены схемы и основные технические характеристики вариантов дезинфекции сооружений водоснабжения: водозаборных скважин, фильтров, резервуаров чистой воды; предложен вариант мобильной установки.

Результаты и их обсуждение. Данные результатов расчетов матрицы выборочных коэффициентов корреляции по статистическим данным позволили оценить степень линейной связи между параметрами процесса и выбрать вид (форму) уравнений математической модели. В полученной матрице модели большинство значений близки к 1, кроме T и H . Это означает, что линейная связь между ними плохая. Поэтому при подборе уравнения принимались нелинейные зависимости.

Т.к. полученные значения выборочного коэффициента корреляции больше $t_T(g, f)$ (т.е. выполняется условие $T_{\text{набл}} > T_{\text{табл}}$), то гипотеза о равенстве нулю коэффициента корреляции была отклонена. Другими словами, все коэффициенты корреляции являются статистически значимыми, а, следовательно, данные D , C , T , H и Q можно использовать при построении уравнения регрессии.

С учетом принятой формы уравнений регрессии с использованием статистических данных с помощью метода наименьших квадратов были рассчитаны следующие уравнение регрессии:

$$C_v = 3,9436 - 27,2356 \cdot D + 0,0339 \cdot C + 0,0286 \cdot T - 0,0456 \cdot H + 0,0247 \cdot Q - 155,3858 \cdot D^2 - 0,0003 \cdot T^2 + 0,0522 \cdot e^{-H}$$

Расчетное значение критерия Фишера для данной модели больше табличного, это означает, что полученное уравнение регрессии адекватно и может применяться для решения задачи оптимизации.

Заключение. Полученная математическая модель позволяет описать зависимость концентрации озона в воде от заданных параметров: диаметра моделируемой скважины (0,1–0,3 м), высоты отбора пробы от точки ввода газовой смеси (0–4 м), концентрации озона в газовой смеси (2,7–55 г/м³), времени обработки (10–60 мин), расхода газовой смеси (3,3–700 дм³/мин).

Работа выполнялась в рамках проекта X15M-074 при поддержке БРФФИ.

Список литературы

1. Романовский, В.И. Анализ эффективности дезинфекции сооружений питьевого водоснабжения с использованием хлорсодержащих дезинфицирующих средств и озона / Романовский В. И., Рымовская М. В., Бессонова Ю. Н., Ковалевская А. М., Лихавицкий В. В. // Вестник БрГУ. Водохозяйственное строительство, теплоэнергетика и геоэкология. – 2015. – №2(92). – С. 68–71.
2. Романовский, В.И. Исследование растворимости озона в воде по высоте столба жидкости / В. И. Романовский, В. В. Лихавицкий, А. Д. Гуринович // Труды БГУ. – 2015. – № 3 (176): Химия и технология неорганических веществ. – С. 113–118.
3. Романовский, В.И. Технические аспекты использования озона в водоподготовке / В.И. Романовский, А.Д. Гуринович, Ю.Н. Бессонова, Е.В. Крышилович // Вода magazine. – 2016. – №2(102). – С. 36–41.
4. Гуринович, А.Д. Эффективность дезинфекции озонированных систем водоснабжения / А.Д. Гуринович, В.И. Романовский, Ю.Н. Бессонова // Водочистка. Водоподготовка. Водоснабжение. – 2016. – №10. – С. 48–51.

О СВОЙСТВАХ ИНЪЕКТОРОВ ЛОКАЛЬНЫХ МНОЖЕСТВ ФИТТИНГА

М.Г. Семенов

Витебск, ВГУ имени П.М. Машерова

Все рассматриваемые в работе группы конечны. В определениях и обозначениях мы следуем [1].

Хорошо известны результаты Локетта [2] о свойствах инъекторов конечной группы для классов Фиттинга. Целью настоящей работы является перенос указанных результатов Локетта на множества Фиттинга частично разрешимой группы.

Напомним, что множеством Фиттинга группы G называют [1, с. 537] такое непустое множество подгрупп группы G , которое замкнуто относительно взятия нормальных подгрупп, их произведений и сопряжений подгрупп. Множество Фиттинга \mathcal{F} группы G назовем

π -насыщенным, если для каждой подгруппы H из G такой, что $O^\pi(H) \in \mathcal{F}$, справедливо $H \in \mathcal{F}$.

Следуя Хартли [3] мы будем рассматривать отображения вида $f : \mathbf{P} \rightarrow \{\text{множества Фиттинга группы } G\}$. Такие отображения будем называть H -функциями группы G . Произведением $\mathcal{F} \circ \mathcal{X}$ множества Фиттинга \mathcal{F} группы G и класса Фиттинга \mathcal{X} назовем множество подгрупп $\{H \leq G : H/H_{\mathcal{F}} \in \mathcal{X}\}$.

Определение. Множество Фиттинга \mathcal{F} группы G назовем *локальным*, если $\mathcal{F} = \bigcap_p f(p) \circ N_p E_{p'}$ для некоторой H -функции f группы G .

Холловской системой [4] π -разрешимой группы G называется такое множество Σ холловских подгрупп из G , что выполняются следующие условия: 1) для всякого множества простых чисел ρ из π $G_\rho \in \Sigma$, а также $G_{\rho \cup \pi} \in \Sigma$; 2) если $H, K \in \Sigma$, то $HK = KH$. Если R подгруппа группы G , то через $\Sigma \cap R$ обозначают множество подгрупп $\{S \cap R \mid \forall S \in \Sigma\}$. Если $\Sigma \cap R$ – холловская система группы R , то говорят, что Σ *редуцирует* холловскую систему Σ_R подгруппы R и обозначают $\Sigma \searrow R$.

Теорема. Пусть \mathcal{F} – локальное π -насыщенное множество Фиттинга π -разрешимой группы G , $K \trianglelefteq G$ и G/K является π' -группой или нильпотентной π -группой. Тогда для любого π -связного \mathcal{F} -инъектора V группы G и холловской системы Σ группы G такой, что $\Sigma \searrow V$, выполняется $V \leq N_G(\Sigma)(V \cap K)$.

Список литературы

1. Doerk, K. Finite Soluble Groups / K. Doerk, T. Hawkes. – Berlin-New York : Walter de Gruyter, 1992. – 891 p.
2. Hartley, B. On Fischer's dualization of formation theory / B. Hartley // Proc. London Math. Soc. – 1969. – Vol. 3, № 2 – P. 193–207.
3. Lockett, F.P. On the theory of Fitting classes of finite soluble groups / F.P. Lockett // Math. Z. – 1973. – Bd. 131, № 2. – S. 103–115.
4. Гольберг, П.А. Холловские θ -базы конечных групп / П.А. Гольберг // Известия высших учебных заведений. – 1961. – № 1 (20). – С. 36–43.

ПРИМЕНЕНИЕ SCAFFOLDING ШАБЛОНОВ ПРИ РАЗРАБОТКЕ УЧЕБНЫХ ИНТЕРНЕТ-ПРИЛОЖЕНИЙ НА ПЛАТФОРМЕ ASP.NET MVC

М.Г. Семенов

Витебск, ВГУ имени П.М. Машерова

При разработке интернет-приложений большое количество времени уходит на написание однотипных классов отвечающих за работу с хранилищем данных, так называемый функционал CRUD: создание, чтение, обновление и удаление данных. Многие современные библиотеки, отвечающие за разработку приложений на основе шаблона Модель-Представление-Контроллер (MVC), в частности ASP.NET MVC, поддерживают полезный механизм шаблонов Scaffolding, который упрощает создание такого рода классов. Этот механизм основан на шаблонах T4 и позволяет на основе класса модели и класса контекста данных автоматически создавать CRUD-контроллеры определенного типа и соответствующие им представления.

В ASP.NET MVC 5 определены некоторые Scaffolding шаблоны как для проектов MVC, так и для WebAPI и контроллеров на основе EntityFramework. Кроме того, Scaffolding шаблоны различного характера доступны через систему пакетов Nuget. Однако стоит отметить, что данные шаблоны, зачастую, плохо подходят для написания учебных проектов студентами, поскольку их содержание не совсем соответствует учебным программам учреждений высшего образования. Например, на факультете математики и информационных технологий ВГУ имени П.М. Машерова студенты специальности «Прикладная информатика» изучают основы безопасности информационных систем на более поздних курсах, а в стандартных шаблонах применяются средства защиты от различных атак, в частности CSRF. Кроме того, изучение основ библиотеки Bootstrap также проходит позднее ASP.NET MVC, хотя в стандартных представлениях активно используются классы Bootstrap. Таким образом, актуальной является задача создания Scaffolding шаблонов, которые бы соответствовали учебному плану и не вызывали затруднений

у студентов при использовании в учебных проектах. Создание таких шаблонов и является основной целью данной работы.

Материал и методы. Материалом являются учебные программы и планы дисциплин специальностей ориентированных на подготовку специалистов в сфере ИТ. При разработке программного продукта использовались: интегральная среда разработки Microsoft Visual Studio 2015, пакеты MvcScaffolding 1.0.9 и T4Scaffolding 1.0.8, ORM библиотека EntityFramework. Работа выполнена в соответствии с основными принципами объектно-ориентированного программирования и шаблона Модель-Представление-Контроллер. В качестве основного метода доступа к данным выступает объектно-реляционное отображение.

Результаты и их обсуждение. Во время проектирования шаблонов мы следовали основным принципам разработки web-приложений на платформе ASP.NET изложенных в [1, 2], и применяли подход к написанию собственных Scaffolding шаблонов из [3, 4].

В ходе работы были проанализированы учебные планы ИТ специальностей и программы дисциплин, связанных с разработкой интернет-приложений и проектированием информационных систем. По результатам анализа были разработаны требования к шаблонам. В качестве базы для разработки выбраны шаблоны контроллеров с использованием ORM библиотеки EntityFramework. Результатом работы являются Scaffolding шаблоны, которые наилучшим образом подходят для написания учебных интернет-приложений.

Стоит отметить, что при изменении модели данных, контроллеры и представления сгенерированные на основе Scaffolding шаблонов не обновляются автоматически. Таким образом, следует уделять особое внимание проектированию базы данных.

Заключение. Разработанные шаблоны могут быть использованы студентами, изучающими web-программирование на платформе ASP.NET MVC, при освоении таких дисциплин как «Программирование интернет-приложений» и «Технологии разработки информационных систем», а также при написании курсовых и дипломных работ.

Список литературы

1. Фримен, А. ASP.NET MVC 4 Framework с примерами на C# 5.0 для профессионалов / А. Фримен, С. Сандерсон – 4-е изд. – М.: Вильямс, 2014. – 688 с.
2. Freeman, A. Pro ASP.NET MVC 5 Platform / A. Freeman – Apress, 2014. – 411 p.
3. Waldman, J. ASP.NET MVC: Override the Default Scaffold Templates // MSDN Magazine. – 2014. – V. 29, № 6 – P. 34–45.
4. MvcScaffolding: Creating custom scaffolders [Electronic resource] / S. Sanderson – College Park M.D., 1996. – Mode of access: <http://blog.stevensanderson.com/2011/04/07/mvcscaffolding-creating-custom-scaffolders>. – Date of access: 09.01.2017.

ОБОБЩЕННЫЙ ИНТЕРФЕЙС ЛИНЕЙНЫХ СТРУКТУР ДАННЫХ

*С.В. Сергеев, О.Г. Казанцева
Витебск, ВГУ имени П.М. Машерова*

Дисциплина «Алгоритмы и структуры данных» входит в государственный компонент цикла специальных дисциплин специальности прикладная математика и прикладная информатика. При изучении дисциплины студенты осваивают, в частности, основные подходы при разработке эффективных алгоритмов, способы организации структур данных и технологию их использования, а также получают навыки реализации и использования структур данных [1, 2].

В рамках раздела «Структуры данных» студенты учатся создавать различные абстрактные типы данных. Особую трудность вызывает создание иерархии линейных структур данных.

Цель исследования – создать общую архитектуру классов, включающую в себя такие абстрактные типы данных как стек, очередь, дек, однонаправленный и двунаправленный списки.

Материал и методы. Объектом исследования служат абстрактные типы данных. Предметом исследования выступают абстрактные типы данных, описывающие линейные структуры данных. Для достижения поставленной цели использовались такие методы как анализ, синтез, сравнение, моделирование (с использованием Unified Modelling Language), методы объектно-ориентированного проектирования.

Результаты и их обсуждение. При изучении структур данных основополагающим является понятие «Абстрактный тип данных» (АТД) – набор, включающий данные и выполняемые над ними операции [3].

Абстракция выделяет существенные характеристики некоторого объекта, отличающие его от всех других видов объектов, и четко описывает его концептуальные границы с точки зрения наблюдателя. Объектно-ориентированное проектирование – это метод проектирования, сочетающий процесс объектно-ориентированной декомпозиции и систему обозначений для представления логической и физической, а также статической и динамической моделей проектируемой системы [4].

В работе предлагается архитектура, состоящая из следующих компонентов: абстрактные типы для структур данных, группы операций, итераторы, различные реализации структуры данных, вспомогательные классы.

Анализируя линейные структуры данных можно выделить следующие группы операций над элементами: общие операции (получение итератора, указывающего на точку входа; проверка структуры на пустоту), добавление и удаление элементов в точках входа (каждая операция выделяется в отдельную группу), операции произвольного доступа (вставка элемента перед или после указанного итератором места, удаление указанного итератором элемента). Абстрактные типы данных включают в себя различные группы операций (см. рисунок 1).

Так как в большинстве случаев организация линейных структур данных не зависит от T – типа хранимых в них элементов, то все имеющиеся типы будут обобщенными с параметром T. Кроме того, группы операций будут обобщенными типами с параметрами: тип используемых итераторов, перечисление точек входа.

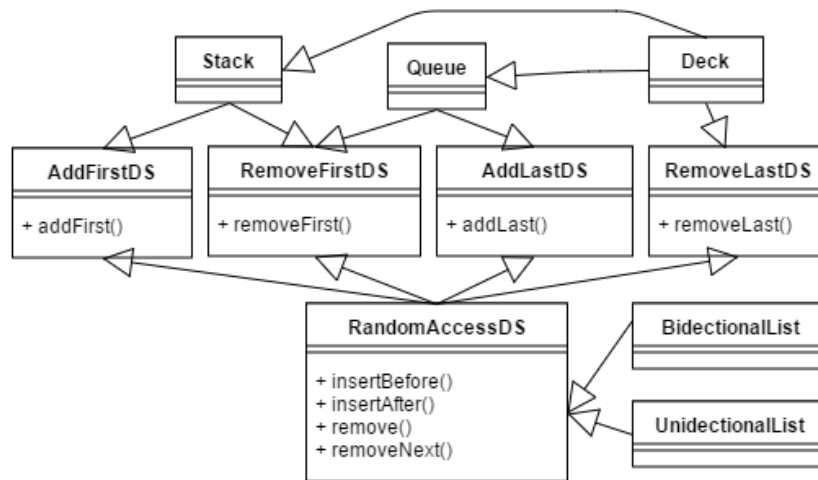


Рисунок 1 – Интерфейсы абстрактных типов данных

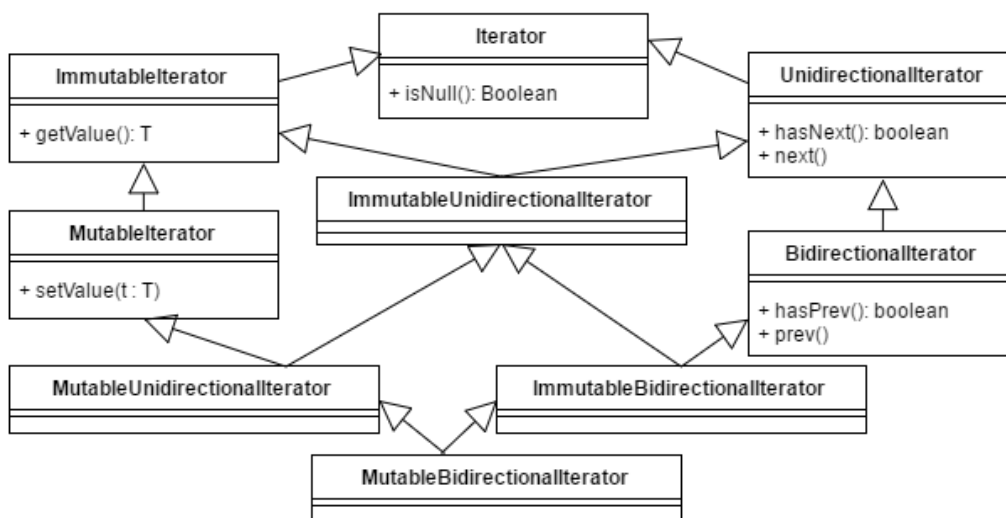


Рисунок 2 – Иерархия итераторов для линейных структур данных

Так как фактические объекты, сохраняющие в себе значения элементов и связи между ними, являются деталями реализации структур данных, то на уровне абстракций информация о положении элемента в структуре данных инкапсулируется в объект, называемый итератором.

Итератор – объект, предоставляющий доступ к каждому элементу набора в некотором порядке [3].

Итераторы линейных структур данных можно классифицировать по двум независимым критериям (см. рисунок 2):

– предоставляет ли итератор возможность изменять элемент, позицию которого он содержит: не изменяющий (ImmutableIterator) или изменяющий итератор (MutableIterator);

– количество направлений, по которым итератор позволяет осуществлять переход: одноподнаправленный (UnidirectionalIterator) или двуподнаправленный итератор (BidirectionalIterator).

Итераторы линейных структур данных поддерживают такие базовые операции как проверка наличия элемента в конкретной позиции (isNull), переход к предыдущему (prev) или следующему (next) элементам, получение (getValue) и установка (setValue) значения элемента.

Предлагаемый подход отличается от используемого в стандартных библиотеках языков программирования, например, Java и C++ иной иерархией классов и отсутствием у структур данных не характерных для них операций.

Закключение. Использование понятия АД способствует осознанному следованию принципам объектно-ориентированного проектирования при разработке приложений, использующих линейные структуры данных. Не имея ясного представления об АД, студенты зачастую создают классы, которые только называются «классами», будучи на самом деле лишь наборами плохо согласующихся друг с другом данных и методов. Понимание АД облегчает создание классов и их последующее изменение.

Предложенная архитектура интерфейсов позволяет увеличить наглядность при работе с абстрактными типами данных, а также обеспечить более углубленное освоение линейных структур данных, а также объектно-ориентированного подхода к разработке приложений.

Список литературы

1. Образовательный стандарт Республики Беларусь. Высшее образование. Первая ступень. Специальность 1-31 03 03 Прикладная математика (по направлениям): ОСВО 1-31 03 03-2013. Введ. – 01.09.2013. – Минск : Министерство образования Республики Беларусь: РИВШ, 2013. – III, 32 с.
2. Образовательный стандарт высшего образования. Высшее образование. Первая ступень. Специальность 1-31 03 07 Прикладная информатика (по направлениям): ОСВО 1-31 03 07-2013. Введ. – 01.09.2013. – Минск : Министерство образования Республики Беларусь: РИВШ, 2013. – III, 45 с.
3. Макконнелл, С. Совершенный код. Мастер-класс / С. Макконнелл. – М. : Издательство «Русская редакция», 2010. – 896 с.
4. Объектно-ориентированный анализ и проектирование с примерами приложений / Г. Буч [и др.]. – 3-е изд. – М. : И. Д. Вильямс, 2008. – 720 с.

О ГРАНИЧНЫХ ЗАДАЧАХ С ПОГРАНИЧНЫМ СЛОЕМ

*И.Ф. Соловьева
Минск, БГТУ*

Актуальность рассматриваемой тематики, по мнению автора, может быть объяснена в основном следующими причинами: в связи с учетом новых физических эффектов, с внедрением технических новинок, использующих теплопередачу, диффузию и т. д., возникают новые классы граничных задач, прикладное значение которых широко известно. Они распространены в механике, акустике, динамике жидкостей, физике и других областях науки и техники.

Граничные задачи с пограничным слоем являются математическими моделями, решения которых отличаются сложным характером поведения, в частности, им присуще развитие пограничных слоев с большими градиентами решений, что значительно усложняет решение этих задач.

Причина трудности решений задач с пограничным слоем заключается в неустойчивости численного процесса [1]. Для решения названных выше задач предлагается метод дифференциальной ортогональной прогонки с введением в зонах пограничных слоев регулирующих множителей.

Метод решения. Рассмотрим двухточечные граничные задачи для обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка вида:

$$\begin{cases} -\varepsilon y''(x) + b(x)y(x) = f(x), & 0 < x < 1, \\ y(0) = A, & y(1) = B, & b(x) > 0, & \varepsilon > 0, \end{cases} \quad (1)$$

где $\varepsilon > 0$ – малый параметр при старшей производной. Задача вида (1) имеет два пограничных слоя [2].

Представим обыкновенные дифференциальные уравнения (1) в виде системы о. д. у. вида

$$\begin{cases} y_1' = y_2, & 0 \leq x \leq 1, \\ y_2' = -\frac{f}{\varepsilon} + \frac{b}{\varepsilon} y_1, & \varepsilon > 0 \end{cases} \quad (2)$$

с граничными условиями:

$$\begin{cases} \alpha_1 y_1(a) + \beta_1 y_2(a) = \gamma_1, & \alpha_1^2 + \beta_1^2 = 1, \\ \alpha_2 y_1(b) + \beta_2 y_2(b) = \gamma_2, & \alpha_2^2 + \beta_2^2 = 1, \end{cases} \quad (3)$$

где $f(x)$ – функция, непрерывная на отрезке $[a, b]$, α_i , β_i , γ_i – заданные постоянные. Предположим, что существует единственное искомое решение задачи (2), (3). Обозначим это решение через $y_1(x)$ и $y_2(x)$.

В виде системы уравнений (2) можно представить любое линейное о. д. у. Граничные условия вида (3) представлены в общем виде, что позволяет рассматривать более широкий класс задач.

После введения вспомогательной функции $\Theta(x)$ и новых неизвестных функций [1] получим выражения для искомого решения и его градиента.

$$\begin{cases} m_1(x, \varepsilon) y_1(x) = \sin \Theta(x) u(x) + \cos \Theta(x) v(x), \\ m_2(x, \varepsilon) y_2(x) = \cos \Theta(x) u(x) - \sin \Theta(x) v(x), \end{cases}$$

Регулирующие множители $m_1(x, \varepsilon) > 0$ и $m_2(x, \varepsilon) > 0$ следует выбирать таким образом, чтобы произведения $m_1(x, \varepsilon) y_1(x)$ и $m_2(x, \varepsilon) y_2(x)$ были в необходимой мере стабилизированы. Они регулируют поведение функции $y(x)$ и его производной $y'(x)$ вблизи зон пограничных слоев.

Результаты и их обсуждение. В качестве практической реализации метода предлагается решение задачи с двумя пограничными слоями.

Пример. Решить граничную задачу с двумя пограничными слоями вида $\varepsilon y''(x) - y(x) = \cos^2 \pi x + 2\varepsilon \pi^2 \cos 2\pi x$ с граничными условиями: $y(0) = 0$, $y(1) = 0$, $\varepsilon = 1/400$.

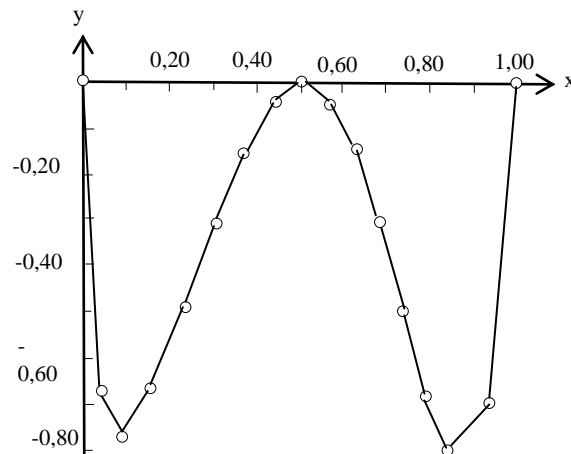


Рис.1. Графическая иллюстрация решения задачи.

Заключение. Предлагаемый алгоритм дает возможность решать граничные задачи с пограничными слоями с достаточно хорошей точностью.

Список литературы

1. Соловьева, И.Ф. О решении систем линейных о. д. у. второго порядка с пограничным слоем / И.Ф. Соловьева Труды БГТУ. Сер./ физ.-мат. науки и информ, 2001. – Вып. IX–С.7–11.
2. Дулан Э., Миллер Дж., Шилдерс У. Равномерные численные методы решения задач с пограничным слоем /пер. с англ. – М., 1983. – С. 200.

ИССЛЕДОВАНИЕ ДОМЕННОЙ СТРУКТУРЫ КРИСТАЛЛОВ TGS, ПОСЛОЙНО ЛЕГИРОВАННЫХ ПРИМЕСЬЮ $D,L\text{-}\alpha$ – И $L\text{-}\alpha$ – АЛАНИНА, МЕТОДАМИ АСМ-МИКРОСКОПИИ

*А.Л. Толстихина¹, В.Н. Шут^{2,3}, С.Е. Мозжаров³, И.Ф. Кашевич²
Москва, Институт кристаллографии им. А.В. Шубникова РАН¹
Витебск, ВГУ имени П.М. Машиерова²
Витебск, ИТА НАН Беларуси³*

Кристалл триглицинсульфата (TGS) обладает значительным пирозэффектом и используется для создания тепловых датчиков и приемников лучистой энергии, например, для детектирования инфракрасного (ИК) и СВЧ-излучения [1]. Пирозэлектрические сенсоры на основе TGS одинаково чувствительны к излучению в области длин волн от УФ до ближнего ИК и при этом не требуют охлаждения при работе по сравнению с квантовыми детекторами. Высокая чувствительность этого материала в сочетании с низкой стоимостью стимулирует разработки в области технологий выращивания кристаллов с целью улучшения пирозэлектрических свойств и расширения температурного диапазона для детектирования ИК-излучения, получения пластин больших размеров, перпендикулярных полярной оси. Ведется поиск новых легирующих добавок и способов стабилизации спонтанной поляризации и управления доменной структурой. Несмотря на то, что кристалл TGS хорошо изучен – на нем отрабатывались самые различные методы наблюдения сегнетоэлектрических доменов – данные по доменной структуре легированных кристаллов ограничены оптическим уровнем.

Целью данной работы было исследование доменной структуры методом атомно-силовой микроскопии, а также свойств монокристаллов TGS с профильным распределением примесей $D,L\text{-}\alpha$ -аланина (DLATGS) и $L\text{-}\alpha$ -аланина (LATGS).

Материал и методы. Материалом исследования служили кристаллы TGS с профильным распределением примеси D,α - и L,α -аланина, выращенные в Институте технической акустики НАН Беларуси. Кристаллы DLATGS–LATGS выращивали из двух различных кристаллизационных растворов, один из которых был только с примесью L,α – аланина, а другой с рацемической смесью (комбинированной) $D,L\text{-}\alpha$ -аланина, путем последовательного периодического доращивания кристалла в каждом из растворов. Размер слоев, легированных L,α -аланином (LATGS) и смесью $D,L\text{-}\alpha$ -аланина (DLATGS), задавался временем роста кристалла в каждом растворе. Для визуализации доменной структуры и оценки ее параметров нами был использован один из методов атомно-силовой микроскопии – метод микроскопии пьезоэлектрического отклика (МПО). Все эксперименты по подготовке и прецизионному исследованию поверхности образцов проводили в контрольно-измерительном комплексе «TRACKPORE ROOM-05», класс чистоты 8 ISO(100), в составе которого имеется сканирующий зондовый микроскоп NTEGRA Prima (HT-МДТ).

Результаты АСМ микроскопического анализа структуры полосчатых монокристаллов (DLATGS–LATGS) были сопоставлены с данными оптического метода нематических жидких кристаллов, а также результатами макроскопических исследований диэлектрических и пирозэлектрических свойств.

Для измерения диэлектрических свойств использовали образцы кристаллов размерами $5\times 1.5\times 5$ мм. На поверхность (010) образцов наносили электроды серебряной пастой. Измерения температурной зависимости диэлектрической проницаемости ε в области фазового перехода проводили на частоте (f) 1 кГц при напряжении 1 В/см. Петли диэлектрического гистерезиса были получены компенсационным электрометрическим методом на частоте 1×10^{-3} Гц при температуре 24°C. Измерения пирозэлектрического коэффициента кристаллов проводили динамическим методом в режиме охлаждения на образцах толщиной 2.1 мм с напыленными алюминиевыми электродами. Частота модуляции теплового излучения составляла 10 Гц.

Результаты и их обсуждение. По данным метода НЖК в кристаллах (25%) DLATGS – (25%) LATGS в отдельных пирамидах роста формируется регулярная доменная структура, и полосы проходят почти через весь кристалл (рис.1а). Методом МПО исследовали доменную структуру грани {110} кристалла (0.25%) DLATGS–(0.25%) LATGS и были получены контрастные изображения доменов разного знака на полярной поверхности того же образца.

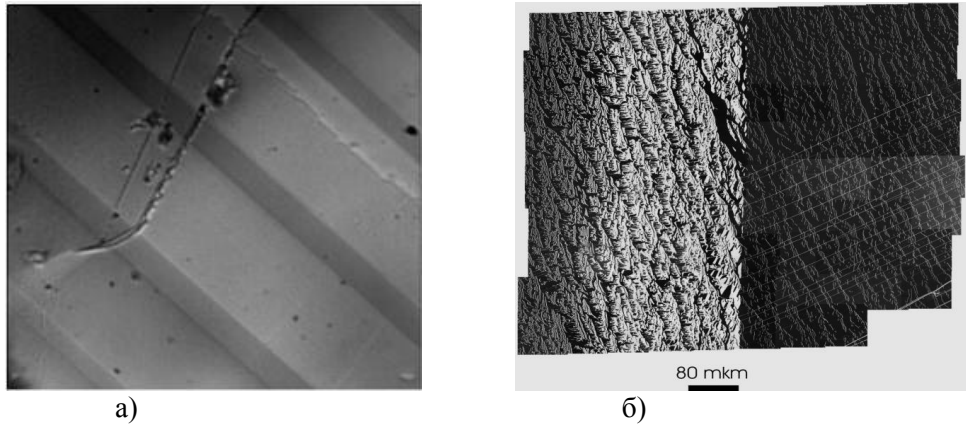


Рис.1 – НЖК – изображение поверхности кристалла (0.25% DLATGS – (25%) LATGS (а); панорамное МПО изображение доменной структуры: слева полоса DLATGS, справа – LATGS. Пирамида роста {110}(б).

На рисунке 1б приведено панорамное изображение, составленное из 90 сканов, на котором можно проследить изменение доменной структуры при нарастании кристалла. Видны две разнополярные полосы DLATGS и LATGS, параллельные естественной грани (фронту роста), шириной ~ 250 мкм. Характер доменов в обеих полосах (большая изрезанность стенок, широкий диапазон колебаний размеров доменов и ориентации стенок) говорит о высокой степени дефектности и сильных механических напряжениях, воздействующих на доменообразование при росте. По полученным изображениям доменов неклассической формы можно судить об усилении анизотропии структуры в полосах DLATGS и LATGS.

С помощью программного обеспечения SPIP 6.1.1(Image Metrology) была проведена обработка МПО-изображений двух участков поверхности с одинаковой площадью 15.7×10^4 мкм²: первый – участок с похожими по размерам доменами сложной формы (полоса с примесью DLATGS), второй – практически монодоменный участок с ветвящимися доменами противоположной компоненты (полоса с примесью LATGS). Данные участки сравнивали по двум параметрам: по статической униполярности k и суммарному периметру l доменных стенок. Статическая униполярность в разных полосах отличается в 2 раза: $k_1 = 0.46$, $k_2 = 0.93$. Суммарный периметр доменных стенок отличается в 2.5 раза: $l_1 = 9 \times 10^4$ мкм, $l_2 = 3.6 \cdot 10^4$ мкм. То есть, добавление примеси изомера D,α – к L,α – аланину в равном количестве в два раза уменьшает статическую униполярность, и при этом в 2.5 раза увеличивается периметр доменных стенок. Таким образом, в объеме кристалла DLATGS–LATGS формируются периодические полосы с доменной структурой, локальные сегнетоэлектрические характеристики которых отличаются примерно в два раза.

Заключение. Проведенное исследование доменной структуры кристаллов с профильным распределением примеси L,α – и D,α – аланина АСМ методом показало, что введение примеси L,α – и D,α – аланина приводит к образованию сложных конфигураций доменных границ, соответствующих сильно искаженной дефектной структуре, закрепленной системой чередующихся полос. Установлено, что такие кристаллы характеризуются модулированной дефектной структурой, которая проявляет высокую степень анизотропии, и могут быть перспективны для практического применения в качестве пьезоэлектрических элементов и чувствительных тензодатчиков.

Список литературы

1. Aggarwal M.D., Batra A.K., Guggilla P., Edwards M.E., Penn B.G., Currie Jr. J.R. Pyroelectric Materials for Uncooled Infrared Detectors Applications. Технический отчет NASA NASA/TM—2010–216373 P.27-39.

О СПЕКТРЕ ОПЕРАТОРА $F(X)=AX+XB$

*Ю.В. Трубников, М.М. Чернявский
Витебск, ВГУ имени П.М. Машерова*

Матричное уравнение Ляпунова $AX + XB = Y$ возникает естественным образом [1] в процессе исследования асимптотических свойств дифференциальных уравнений, а также в ряде задач теории управления. Представляют интерес как различные представления для решения X , так и свойства оператора $F X = AX + XB$. Целью данной работы является установление связи между спектрами операторов A и B и оператором F преобразованном к виду $F : C^4 \rightarrow C^4$, где C – множество комплексных чисел.

Материал и методы. Материалом исследования послужили линейные операторы в банаховых пространствах, линейные матричные уравнения. Были применены аналитические с использованием пакета компьютерной математики *Maple 18*.

Результаты и их обсуждение. Рассмотрим в пространстве всех матриц размерности $[2 \times 2]$ с комплексными элементами уравнение (1)

$$AX + XB = Y \quad (1)$$

с заданными матрицами A, B, Y . Для уравнения (1), рассматриваемого в пространстве всех линейных ограниченных операторов, действующих в произвольном банаховом пространстве, имеет место [2, с. 37] следующий факт: пусть $\lambda, \mu \in \sigma A \times \sigma B$, где $\sigma A, \sigma B$ – спектры операторов A, B ; тогда если $\lambda + \mu \neq 0$, то уравнение (1) имеет единственное решение, и оно находится по формуле (2)

$$X = -\frac{1}{4\pi^2} \int_{\Gamma_A} \int_{\Gamma_B} \frac{1}{\lambda + \mu} A - \lambda I^{-1} Y B - \mu I^{-1} d\lambda d\mu, \quad (2)$$

где Γ_A, Γ_B – контуры, охватывающие спектры операторов A, B ;

Однако даже в случае матриц небольшой размерности требуется явная формула выражения (2) в терминах элементов матриц A, B, Y . и структура спектра оператора $F X \equiv AX + XB$.

Для этого проведём следующие построения. Упорядочим элементы матриц X, Y следующим образом:

$$x_{11} = x_1, x_{12} = x_2, x_{21} = x_3, x_{22} = x_4; y_{11} = y_1, y_{12} = y_2, y_{21} = y_3, y_{22} = y_4.$$

Тогда уравнение (1) можно рассматривать как уравнение вида (3)

$$\begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & b_{21} & a_{12} & 0 \\ b_{12} & a_{11}+b_{22} & 0 & a_{12} \\ a_{21} & 0 & a_{22}+b_{11} & b_{21} \\ 0 & a_{21} & b_{12} & a_{22}+b_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{pmatrix} \quad (3)$$

в комплексном пространстве C^4 с матрицей

$$F = \begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & b_{21} & a_{12} & 0 \\ b_{12} & a_{11}+b_{22} & 0 & a_{12} \\ a_{21} & 0 & a_{22}+b_{11} & b_{21} \\ 0 & a_{21} & b_{12} & a_{22}+b_{22} \end{pmatrix}.$$

Теорема 1. Собственными значениями матрицы F являются суммы

$$\lambda + \mu \quad \lambda, \mu \in \sigma A \times \sigma B .$$

Доказательство. Собственными значениями матриц A и B являются числа:

$$\lambda_{1,2} = \frac{1}{2} \left[a_{11} + a_{22} \pm \sqrt{a_{11} - a_{22}}^2 + 4a_{12}a_{21} \right]^{1/2}, \quad (4)$$

$$\mu_{1,2} = \frac{1}{2} \left[b_{11} + b_{22} \pm \sqrt{b_{11} - b_{22}}^2 + 4b_{12}b_{21} \right]^{1/2}. \quad (5)$$

Заметим, что характеристический многочлен матрицы F имеет вид

$$t^4 + f_3 t^3 + f_2 t^2 + f_1 t + f_0, \quad (6)$$

где

$$f_1 = - (a_{11} + b_{11} + a_{22} + b_{22}) (-2b_{12}b_{21} + a_{22}b_{11} + 2a_{22}a_{11} + a_{22}b_{22} + 2b_{11}b_{22} - 2a_{21}a_{12} + a_{11}b_{22} + a_{11}b_{11});$$

$$f_2 = -2a_{12}a_{21} - 2b_{12}b_{21} + a_{22}^2 + 3a_{22}b_{11} + 4a_{11}a_{22} + 3a_{22}b_{22} + 4b_{11}b_{22} + 3a_{11}b_{22} + b_{22}^2 + 3a_{11}b_{11} + b_{11}^2 + a_{11}^2;$$

$$f_3 = -2(a_{11} + b_{11} + a_{22} + b_{22});$$

$$f_0 = -2a_{12}a_{21}b_{12}b_{21} + 2a_{11}a_{22}b_{11}b_{22} - a_{22}b_{11}b_{12}b_{21} - a_{11}b_{11}b_{12}b_{21} - a_{11}a_{12}a_{21}b_{11} - a_{11}a_{12}a_{21}b_{22} - a_{11}b_{12}b_{21}b_{22} - 2b_{11}b_{12}b_{21}b_{22} - a_{22}^2 b_{12}b_{21} + a_{22}^2 b_{11}b_{22} + a_{22}b_{11}b_{22}^2 - a_{12}a_{21}b_{22}^2 - a_{12}a_{21}b_{11}^2 + a_{11}^2 a_{22}b_{11} + a_{11}^2 a_{22}b_{22} + b_{11}^2 b_{22}^2 + b_{12}^2 b_{21}^2 + a_{12}^2 a_{21}^2 + a_{11}a_{22}b_{11}^2 + a_{22}b_{11}^2 b_{22} + a_{11}^2 b_{11}b_{22} + a_{11}b_{11}^2 b_{22} - a_{11}^2 b_{12}b_{21} + b_{22}^2 a_{11}b_{11} - a_{12}a_{21}a_{22}b_{22} - a_{12}a_{21}a_{22}b_{11} - a_{22}b_{12}b_{21}b_{22} + a_{11}^2 a_{22}^2 - 2a_{11}a_{12}a_{21}a_{22} + a_{11}a_{22}^2 b_{11} + a_{11}a_{22}^2 b_{22} + a_{11}a_{22}b_{22}^2.$$

Подставляя суммы $\lambda_j + \mu_k$ $j, k = 1, 2$ в характеристический многочлен матрицы F (6), убеждаемся, что эти числа являются его корнями.

Если же в уравнении (1) матрицы A и B совпадают, то есть уравнение (1) имеет вид (7)

$$AX + XA = Y, \quad (7)$$

то тогда формулы для нахождения собственных значений матрицы F (суммы $\lambda_j + \lambda_k$ $j, k = 1, 2$) становятся существенно проще и имеют вид (8).

$$\psi_{1,2} = 2\lambda_{1,2} = a_{11} + a_{22} \pm \sqrt{a_{11} - a_{22}}^2 + 4a_{12}a_{21} \Big)^{1/2}, \quad (8)$$

$$\psi_{3,4} = \lambda_1 + \lambda_2 = a_{11} + a_{22}, \quad \psi \in \sigma F$$

Значительно упрощается в данном случае и вид характеристического многочлена матрицы F (9).

$$(t - a_{11} - a_{22})^2 (t^2 - 2(a_{11} + a_{22})t + 4a_{11}a_{22} - 4a_{12}a_{21}) . \quad (9)$$

Заключение. Таким образом, в данной работе доказано, что собственными значениями матричного оператора $F X \equiv AX + XB$ с матрицами размера $[2 \times 2]$ являются суммы

$$\lambda_j + \mu_k \quad j, k = 1, 2, \quad \lambda, \mu \in \sigma A \times \sigma B ,$$

что является важным фактом для дальнейшего построения новых алгоритмов решения матричных уравнений.

Список литературы

1. Трубников Ю.В. Дифференциальные уравнения с монотонными нелинейностями / Ю.В. Трубников, А.И. Перов. – Мн.: Наука и техника, 1986. – 199 с.
2. Далецкий, Ю.Л. Устойчивость решений дифференциальных уравнений в банаховом пространстве / Ю.Л. Далецкий, М.Г. Крейн. – М.: Наука, 1970. – 536 с.

УПРАВЛЯЕМОСТЬ ВПОЛНЕ ИНТЕГРИРУЕМЫХ ЛИНЕЙНЫХ СТАЦИОНАРНЫХ СИСТЕМ ПФАФФА

О.В. Храпцов
Витебск, ВГУ имени П.М. Машерова

В данной работе продолжается изучение свойств управляемости вполне интегрируемых линейных стационарных систем Пфаффа. В работе [1] получен критерий двухточечной полной управляемости в случае, когда заданы произвольные постоянные начальный вектор состояния и конечный вектор состояния. В работе [2] введено понятие континуум управляемости, когда конечным состоянием является произвольная ограниченная аналитическая вектор функция, и доказан критерий наличия этого свойства при двумерном векторе управления. В настоящей работе изучаются свойства континуум и максимальной управляемостей в случае, когда размерность вектора управления больше двух. В отличие от случая систем обыкновенных дифференциальных уравнений [3] переход к управлению большей размерности представляет определенные трудности. Доказан ряд условий наличия свойств континуум и максимальной управляемостей. Эти условия носят ранговый характер от некоторых матриц, составленных по известным матрицам исходной системы Пфаффа.

Материал и методы. Материалом исследования является вполне интегрируемая линейная система Пфаффа. Были применены следующие методы: метод Коши отыскания общего решения системы Пфаффа, метод матричного анализа, метод проблемы моментов.

Результаты и их обсуждение. Рассматривается процесс, описываемый вполне интегрируемой линейной системой Пфаффа Θ

$$\Theta: dx = (A_1x + B_1u(s))ds_1 + (A_2x + B_2u(s))ds_2, \quad (1)$$

где $s = (s_1, s_2) \in R^2$, $x \in R^n$ – выход, состояние системы, $u \in R^r$ – вход, управление, непрерывно дифференцируемая вектор-функция, $r \leq 2n$, A_1, A_2, B_1, B_2 – постоянные вещественные матрицы соответствующих размерностей. Условия полной интегрируемости системы (1) имеют вид [4, с. 44]

$$A_1A_2 = A_2A_1, \quad (2)$$

$$B_1 \frac{\partial u}{\partial s_2} - B_2 \frac{\partial u}{\partial s_1} = Pu, \quad P \equiv A_2B_1 - A_1B_2. \quad (3)$$

При выполнении этих условий для заданного вектора u система (1) имеет единственное решение с начальным условием

$$x(0) = x^0. \quad (4)$$

Рассмотрим свойства управляемости систем Пфаффа (1) в смысле следующих определений.

Определение 1 [1]. Система (1) называется вполне управляемой, если для произвольных состояний $x^0, x^1 \in R^n$ существуют точка $s^1 = (s_1^1, s_2^1)$, $0 < s_1^1, s_2^1 < \infty$, и непрерывно дифференцируемое управление $u = u(s, x^0, x^1)$ такие, что для некоторого решения системы (1) наряду с условием (4) выполняется условие

$$x(s^1) = x^1. \quad (5)$$

В данной работе изучается возможность управления системой (1) при конечном условии

$$x(s_1, s_2^0) = \phi(s_1), \quad s_1 \in I = (a, b), \quad (6)$$

где ϕ – ограниченная аналитическая вектор функция.

Определение 2 [2]. Система (1) называется вполне континуум управляемой, если для произвольного состояния $x^0 \in R^n$ и произвольной аналитической ограниченной вектор функции ϕ существует интервал I , конечный момент $s_2^0 > 0$ и непрерывно дифференцируемое управление $u = u(s, x^0, \phi)$ такие, что для некоторого решения системы (1) наряду с условием (4) выполняется условие (6).

Пусть вектор управления u имеет размерность $r \geq 2$ ($r \leq 2n$). Если ввести вспомогательный параметр q равенством $m+q=r$, $q \in \{0,1,\dots,r-1\}$, то для него возможны варианты соотношения с числом m : а) $q=0$, б) $m=q$ в) $m>q$, г) $m<q$.

Класс систем Пфаффа Θ_1 разбивается на три класса: Класс Θ_{11} в случае $q=0$, т.е. $m=r$. Класс Θ_{12} в случае $m=q$. Класс Θ_{13} в случае $m>q$. Рассмотрим свойства управляемости систем Пфаффа в каждом классе.

Предложение 1.4 Системы Пфаффа класса Θ_{11} не являются вполне континуум управляемыми ни при каких условиях.

Теорема 1. Система Пфаффа класса Θ_1 вполне управляема тогда только тогда, когда

$$\exists \alpha \in R^1 : \text{rank} Q(\alpha) = n,$$

Здесь $Q(\alpha) \equiv [B(\alpha), A(\alpha)B(\alpha), \dots, A^{n-1}(\alpha)B(\alpha)],$

$$B(\alpha) \equiv \alpha B_1 + (1-\alpha)B_2, \quad A(\alpha) \equiv \alpha A_1 + (1-\alpha)A_2.$$

Теорема 2. Система Пфаффа (1) класса Θ_{12} вполне континуум управляема тогда и только тогда, когда

$$\exists \alpha \in R^1 : \text{rank} Q_2(\alpha) = n, \quad (7)$$

где $Q_2(\alpha) \equiv [B, A_2(\alpha)B, \dots, A_2^{n-1}(\alpha)B], \quad A_2(\alpha) \equiv \alpha A_1 + A_2.$

Теорема 3. Система Пфаффа (1) класса Θ_{12} вполне максимально управляема тогда и только тогда, когда выполняется условие (7).

Теорема 4. Для полной континуум управляемости системы Пфаффа (1) класса Θ_{13} достаточно существование вектора $\beta^{(i)}$ из спектра Ω линейной зависимости матрицы $L_2(\beta)$, для которого выполняются условия

$$\text{rank} Q_3(\beta^{(i)}) = n, \quad (8)$$

здесь $Q_3(\beta) \equiv [BM_i, A_2(\beta)BM_i, \dots, A_2^{n-1}(\beta)BM_i], \quad A_2(\beta) \equiv \beta_1 A_1 + \beta_2 A_2.$

Теорема 5. Для полной максимальной управляемости системы Пфаффа класса Θ_{13} достаточно существование вектора $\beta^{(i)}$ из спектра Ω линейной зависимости матрицы $L_2(\beta)$, для которого выполняются условие (8) и условие

$$\exists \alpha \in R^1 : \text{rank} Q_1(\alpha) = n,$$

здесь $Q_1(\alpha) \equiv [B, A_1(\alpha)B, \dots, A_1^{n-1}(\alpha)B], \quad A_1(\alpha) \equiv A_1 + \alpha A_2.$

Все рассматриваемое множество систем Пфаффа разбито на классы. В каждом из них доказаны критерии наличия свойств полной, континуум и максимальной управляемостей. Условия носят ранговый характер и поэтому легко проверяются методами матричного анализа

Заключение. Исследование носит фундаментальный характер и может быть использовано в прикладных задачах.

Список литературы

1. Храмов, О.В. К управляемости стационарных систем Пфаффа / О.В. Храмов // «Дифференц. Уравнения», 1985. – Т.21, N 11. – С. 1933 – 1939.
2. Храмов, О.В. Задача континуум управляемости линейных стационарных систем Пфаффа / О.В. Храмов // «Вестник ВДУ», 2010. – N 3. – С. 54–59.
3. Ройтенберг, Я.Н. Автоматическое управление / Я.Н. Ройтенберг. Москва: Наука. 1971. – 395 с.
4. Гайшун, И.В. Вполне разрешимые многомерные дифференциальные уравнения / И.В. Гайшун. – Минск: Наука и техника, 1983. – 371 с.

УСЕЧЕННАЯ ДРОБНАЯ ПРОИЗВОДНАЯ ТИПА МАРШО–АДАМАРА

С.А. Шлапаков
Витебск, ВГУ имени П.М. Машерова

В работе объектом исследования является операция дробного дифференцирования Римана–Лиувилля [1], которой на полуоси можно придать качественно иной вид. Эту форму представления называют дробной производной Маршо [1]. В работе [5] рассматривалась конструкция дробной производной Маршо применительно к дробной производной Адамара [3] и называлась она дробной производной Маршо–Адамара. Естественным образом видится задача построения обобщающей её конструкции. Настоящая работа посвящена этому аспекту.

Целью исследования является построение более общей формы дробной производной Маршо–Адамара [4] в весовых пространствах суммируемых функций.

Материал и методы. Материалом исследования является конструкция дробной производной Маршо–Адамара [4]. В работе используются методы функционального анализа, а также методы дифференциального и интегрального исчисления.

Результаты и их обсуждение. Дробная производная Маршо–Адамара [4], в случае $0 < \alpha < 1$ имеет вид

$$\mathfrak{D}_{0+}^{\alpha} f(x) = \frac{\alpha}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^{\infty} \frac{f(x) - f(xe^{-t})}{t^{\alpha+1}} dt = \frac{\alpha}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^x \frac{f(x) - f(t)}{\left(\ln \frac{x}{t}\right)^{\alpha+1} t} dt, \quad (1)$$

где $\Gamma(z) = \int_0^{\infty} x^{z-1} e^{-x} dx$ – гамма-функция.

Рассмотрим дробную производную типа Адамара порядка $\alpha > 0$ на полуоси $R_+ = (0, \infty)$:

$$\mathfrak{D}_{0+,\mu}^{\alpha} f(x) = x^{-\mu} \delta^n x^{\mu} \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_0^x \left(\frac{t}{x}\right)^{\mu} \left(\ln \frac{x}{t}\right)^{n-\alpha-1} f(t) \frac{dt}{t}, \quad (2)$$

$$x > 0, \mu \in R, \delta = x \frac{d}{dx}.$$

При $0 < \alpha < 1$ формула (2) принимает вид

$$\mathfrak{D}_{0+,\mu}^{\alpha} f(x) = x^{1-\mu} \frac{d}{dx} \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^x \left(\ln \frac{x}{t}\right)^{-\alpha} f(t) \frac{dt}{t^{1-\mu}}. \quad (3)$$

Вместо дробной конструкции (3) нам удобнее рассматривать её модификацию вида

$$\begin{aligned} \mathfrak{D}_{0+,\mu}^{\alpha} f(x) &= \frac{\alpha}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^{\infty} e^{-\mu t} \frac{f(x) - f(xe^{-t})}{t^{\alpha+1}} dt + \mu^{\alpha} f(x) = \\ &= \frac{\alpha}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^x \left(\frac{t}{x}\right)^{\mu} \left(\ln \frac{x}{t}\right)^{-\alpha-1} [f(x) - f(t)] \frac{dt}{t} + \mu^{\alpha} f(x), \end{aligned} \quad (4)$$

которую будем называть дробной производной типа Маршо–Адамара по аналогии с дробной производной Маршо. Дробные производные (4) являются более естественными на полуоси R_+ нежели дробные производные (3). Будем рассматривать дробную производную типа Маршо–Адамара (4) в весовом пространстве суммируемых функций $X_c^p(a, b)$ [2]:

$$X_c^p(a, b) = \left\{ h(t) : \int_a^b |t^c h(t)|^p \frac{dt}{t} < +\infty, 0 \leq a < b \leq \infty, c \in R, 1 \leq p < \infty \right\},$$

$$\|h\|_{X_c^p} = \left(\int_a^b |t^c h(t)|^p \frac{dt}{t} \right)^{1/p}.$$

Для функций $f(x) \in X_c^p(R_+)$ мы будем понимать производные типа Маршо–Адамара как сходящиеся интегралы. Именно, пусть

$$\mathbf{D}_{0+, \mu, \varepsilon}^\alpha f(x) = \frac{\alpha}{\Gamma(1-\alpha)} \int_\varepsilon^\infty e^{-\mu t} \frac{f(x) - f(xe^{-t})}{t^{\alpha+1}} dt + \mu^\alpha f(x), \quad \varepsilon > 0, 0 < \alpha < 1. \quad (5)$$

Тогда по определению $\mathbf{D}_{0+, \mu}^\alpha f = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \mathbf{D}_{0+, \mu, \varepsilon}^\alpha f$ по норме пространства X_c^p . Выражение (5) называется усечённой дробной производной типа Маршо–Адамара.

Следующее утверждение дает интегральное представление формулы (5).

Теорема. Пусть $f(x) = \mathfrak{I}_{0+, \mu}^\alpha \varphi = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^x \left(\frac{t}{x}\right)^\mu \left(\ln \frac{x}{t}\right)^{\alpha-1} \varphi(t) \frac{dt}{t}$ ($x > 0$), $\varphi \in X_c^p(R_+)$, где

числа α, p, μ, c таковы, что $0 < \alpha < 1, 1 \leq p < \infty, \mu \geq 0, c \in R, \mu > c$. Тогда усечённая дробная производная $\mathbf{D}_{0+, \mu, \varepsilon}^\alpha f$ ($\varepsilon > 0$) имеет следующее интегральное представление:

$$\mathbf{D}_{0+, \mu, \varepsilon}^\alpha f(x) = \int_0^\infty K(t) \varphi(xe^{-t}) dt,$$

где

$$K(t) = \frac{\sin \alpha \pi e^{-\mu t}}{\pi t} \left[\Gamma(-\alpha, \mu \varepsilon) + \Gamma(1-\alpha) (\mu \varepsilon)^{-\alpha} t_+^\alpha - (t-1)_+^\alpha \right],$$

$$\Gamma(\alpha, x) = \int_x^\infty t^{\alpha-1} e^{-t} dt, \quad \alpha \in R, x > 0, \quad y_+^\alpha = \begin{cases} y^\alpha, & y > 0, \\ 0, & y < 0. \end{cases}$$

При этом ядро $K(t) \in L_1(R_+)$ является усредняющим: $\int_0^\infty K(t) dt = 1, K(t) > 0$

при $t > 0$.

Заключение. Значимость исследования свойств операторов дробного интегрирования и дифференцирования обусловлена их применением при отыскании ответов на разнообразные вопросы физики и механики в теории колебаний, теории теплопроводности, теории упругости. В работе построено обобщение так называемой дробной производной Маршо–Адамара, рассмотрено интегральное представление так называемой усечённой дробной производной типа Маршо–Адамара.

Список литературы

1. Самко, С.Г. Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения / С.Г. Самко, А.А. Килбас, О.И. Маричев. – Мн.: Наука и техника, 1987. – 688 с.
2. Шлапаков, С.А. О дробном интегрировании Адамара в весовых пространствах суммируемых функций / С.А. Шлапаков // Веснік ВДУ. – 2009. Т. 53, №3. – С. 132-135.
3. Шлапаков, С.А. Операторы дробного интегрирования по Адамару / С.А. Шлапаков // Наука – образованию, производству, экономике: материалы XVI (63) Региональной научно-практической конференции преподавателей, научных сотрудников и аспирантов, 16–17 марта 2011 г. – Витебск, 2011. – Т. 1. С. 71-73.
4. Шлапаков, С.А. Производные Маршо–Адамара дробного порядка / С.А. Шлапаков // Наука – образованию, производству, экономике: материалы XX (67) Региональной научно-практической конференции преподавателей, научных сотрудников и аспирантов, 12–13 марта 2015 г. – Витебск, 2015. – Т. 1. – С. 27-28.
5. Шлапаков, С.А. Дробные производные типа Адамара и типа Маршо–Адамара на полуоси / С.А. Шлапаков // Наука – образованию, производству, экономике: материалы XXI (68) Региональной научно-практической конференции преподавателей, научных сотрудников и аспирантов, 11–12 февраля 2016 г. – Витебск, 2016. – Т. 1. С. 37-38.

УРАВНЕНИЕ $X^n = A$ ДЛЯ МАТРИЦ ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА

К.Л. Якуто

Витебск, ВГУ имени П.М. Машерова

Важное значение для решения большого круга задач, связанных с моделированием экономических, социальных процессов, имеет задача о целом положительном решении уравнения $X^n = A$ для матриц различных порядков [1, с. 189]. Целью настоящей работы является доказательство эффективности использования аналитических методов для решения задачи по нахождению целых положительных решений нелинейного матричного уравнения $X^n = A$ для матриц третьего порядка.

Материал и методы. В данной работе изучаются нелинейные матричные уравнения вида $X^n = A$ где A, X – матрицы второго порядка, n – натуральное число. Методика проводимого исследования: решаемое уравнение записывалось в виде системы из девяти нелинейных уравнений, которая затем решалась аналитическими методами.

Результаты и их обсуждение.

Пусть необходимо выяснить, когда корень n -ой степени матрицы третьего порядка будет иметь нулевые диагональные элементы и отличные от нуля внедиагональные, т. е.

$$\begin{pmatrix} 0 & b & c \\ d & 0 & f \\ g & h & 0 \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} K & L & M \\ N & P & Q \\ R & S & T \end{pmatrix}.$$

Лемма. При $n = 4$ переменные b, c, f можно найти, используя следующие формулы: $b = \sqrt[4]{\frac{x^3 z}{y}}, c = \sqrt[4]{\frac{x}{y^3 z}}, f = \sqrt[4]{\frac{1}{xyz^3}}$, где x – корень уравнения $\frac{L\alpha^2\gamma}{x} + N\beta x = A$, y – корень уравнения $\frac{R\alpha\gamma}{y} + M\beta^2 y = B$, z – корень уравнения $\frac{S\beta}{z} + Q\alpha\gamma^2 z = E$, переменные d, g, h можно найти, используя следующие формулы: $d = \frac{\alpha}{b}, g = \frac{\beta}{c}, h = \frac{\gamma}{f}$.

$$A = LN + \beta\gamma \alpha^2 - (2\alpha + \beta + \gamma)^2, \quad B = MR + \alpha\gamma \beta^2 - (\alpha + 2\beta + \gamma)^2,$$

$$E = QS + \alpha\beta \gamma^2 - (\alpha + \beta + 2\gamma)^2, \quad \alpha = bd, \beta = cg, \gamma = fh.$$

Доказательство. В рассматриваемом случае система уравнений будет иметь следующий вид:

$$\begin{cases} b^2 d^2 + 2bcdg + bdfh + cfgh + c^2 g^2 = K, \\ 2bcdh + b^2 fg + c^2 gh + cfh^2 = L, \\ 2bcfg + c^2 dh + b^2 df + bf^2 h = M, \\ 2bdfg + cd^2 h + cfg^2 + f^2 gh = N, \\ b^2 d^2 + 2bdfh + bcdg + cfgh + f^2 h^2 = P, \\ 2cdfh + bcd^2 + c^2 dg + bf^2 g = Q, \\ 2cdgh + bd^2 h + dfh^2 + bfg^2 = R, \\ 2bfg h + b^2 dg + bcg^2 + cdh^2 = S, \\ c^2 g^2 + 2cgfh + bcdg + bdfh + f^2 h^2 = T. \end{cases} \quad (1)$$

Рассмотрим первое, пятое и девятое уравнения системы (1):

$$\begin{cases} b^2d^2 + 2bcdg + bdfh + cfgh + c^2g^2 = K, \\ b^2d^2 + 2bdfh + bcdg + cfgh + f^2h^2 = P, \\ c^2g^2 + 2cgfh + bcdg + bdfh + f^2h^2 = T. \end{cases} \quad (2)$$

Сделаем следующую замену: $\alpha = bd$, $\beta = cg$, $\gamma = fh$.

Решая систему (2), можно найти переменные α и β , которые в данном случае будут зависеть от переменной γ .

$$\alpha = \frac{4\gamma^2 P - T + -K + P + T^2 - \gamma^4}{4\gamma - K + P + T + \gamma^2}, \quad \beta = \frac{-4\gamma^2 P - T + -K + P + T^2 - \gamma^4}{4\gamma - K + P + T + \gamma^2}.$$

Оценка для γ имеет вид: $1 \leq \gamma \leq \sqrt{P-5}$.

Таким образом произведения всех пар симметричных относительно главной диагонали элементов считаем известными.

Перепишем второе и четвёртое уравнения системы (1) в следующем виде:

$$\begin{cases} ch \ 2bd + cg + fh = L - b^2fg, \\ fg \ 2bd + cg + fh = N - cd^2h. \end{cases} \quad (3)$$

Перемножив уравнения системы (3), получим следующее уравнение:

$$Lcd^2h + Nb^2gh = A \quad (4)$$

где $A = LN + \beta\gamma \alpha^2 - (2\alpha + \beta + \gamma)^2$.

Перепишем третье и седьмое уравнения системы (1) в следующем виде:

$$\begin{cases} bf \ bd + 2cg + fh = M - c^2dh, \\ dh \ bd + 2cg + fh = R - bfg^2. \end{cases} \quad (5)$$

Перемножив уравнения системы (5), получим следующее уравнение:

$$Rc^2dh + Mbfg^2 = B \quad (6)$$

где $B = MR + \alpha\gamma \beta^2 - (\alpha + 2\beta + \gamma)^2$.

Перепишем шестое и восьмое уравнения системы (1) в следующем виде:

$$\begin{cases} cd \ bd + cg + 2fh = Q - bf^2g, \\ bg \ bd + cg + 2fh = R - cdh^2. \end{cases} \quad (7)$$

Перемножив уравнения системы (7), получим следующее уравнение:

$$Qcdh^2 + Sbf^2g = E \quad (8)$$

где $E = QS + \alpha\beta \gamma^2 - (\alpha + \beta + 2\gamma)^2$.

Поскольку α , β , γ считаем известными, то A , B , E также можем считать известными.

Таким образом имеем следующую систему уравнений:

$$\begin{cases} Lcd^2h + Nb^2gh = A, \\ Rc^2dh + Mbfg^2 = B, \\ Qcdh^2 + Sbf^2g = E, \\ bd = \alpha, \\ cg = \beta, \\ fh = \gamma. \end{cases} \quad (9)$$

Выразив переменные d , g , h из трёх последних уравнений системы (9) и подставив полученные значения в первые три уравнения, получим:

$$\begin{cases} \frac{L\alpha^2\gamma}{x} + N\beta x = A, \\ \frac{R\alpha\gamma}{y} + M\beta^2 y = B, \\ \frac{S\beta}{z} + Q\alpha\gamma^2 z = E. \end{cases} \quad (10)$$

где $x = \frac{b^2 f}{c}$, $y = \frac{bf}{c^2}$, $z = \frac{c}{bf^2}$.

Считая x , y , z известными, можно найти переменные b , c , f : $b = \sqrt[4]{\frac{x^3 z}{y}}$, $c = \sqrt[4]{\frac{x}{y^3 z}}$,

$$f = \sqrt[4]{\frac{1}{xyz^3}}.$$

Заключение. Для решения задачи по нахождению целых положительных решений матричного уравнения $X^n = A$ для матриц третьего порядка в случае натуральных n можно использовать аналитические методы.

Список литературы

1. Буснюк, Н.Н. Математическое моделирование: учеб. пособие / Н.Н. Буснюк, А. А. Черняк. – Минск: Беларусь, 2014. – 214 с.